Stacionární rozdělení

18.3.2019

1. Adam a Berta opakovaně házejí kostkou a hrají následující hru: Pokud padne číslo větší než 4, vyhrává Adam a dostane od Berty 1 dolar, pokud padne číslo menší než 3, vyhrává Berta a dostane od Adama 1 dolar. Padle-li 3 nebo 4, nastává remíza. Ve hře je celkový kapitál k dolarů a hra končí ve chvíli, když jeden z hráčů nemá žádné peníze. Označme jako X_n počet dolarů, které má Adam po n-tém kole.

   (a) Ukažte, že je $\{X_n\}_0^\infty$ homogenní Markovův řetězec a zapište jeho matici pravděpodobností přechodu. Rozhodněte, zda je řetězec nerozložitelný a klasifikujte jeho stavy.

   Pro další body uvažujte speciální situaci $k = 2$.

   (b) Zapište matici $\mathbf{P}$ znovu pro tuto situaci a spočtěte stacionární rozdělení.
   (c) Určete matici $\mathbf{P}^n$ a určete rozdělení $\mathbf{p}(n)$ pro obecné počáteční rozdělení $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, a pro stacionární rozdělení spočtené v (b).

2. Uvažujme dvě urny, ve kterých je celkem k koulí očíslovaných $1, \dots, k$. V každém kroku náhodně zvolíme jedno číslo z $1, \dots, k$ a koule s daným číslem se přemístí do druhé urny. Počet koulí v urně představuje teplotu tělesa a přemístění koule výměnu tepla. Označme X_n počet koulí v první urně (tj. teplotu prvního tělesa) v čase n.

   (a) Ukažte, že $\{X_n\}$ tvoří homogenní Markovův řetězec, určete jeho matici pravděpodobností přechodu. Rozhodněte, zda je řetězec nerozložitelný, a klasifikujte jeho stavy.
   (b) Určete stacionární rozdělení.

3. Leze slimák po nekonečně vysokém stromě. Za každou hodinu vyleze nahoru o jeden centimetr s pravděpodobností $p = 1/4$ a se zbylou pravděpodobností $q = 3/4$ sklouzne dolů o jeden centimetr, je-li nad základní úrovní (jinak namísto sklouznutí zůstává na svém místě). Označme X_n výšku v cm, ve které se slimák nachází po n hodinách.

   (a) Ukažte, že $\{X_n\}$ tvoří Markovův řetězec a určete jeho matici pravděpodobností přechodu. Rozhodněte, zda je řetězec nerozložitelný.
   (b) Spočtěte stacionární rozdělení (existuje-li).

4. Uvažujte předchozí příklad s $p = 3/4$ a $q = 1/4$.

Stacionární rozdělení. Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a množinou stavů S. Nechť π je pravděpodobnostní rozdělení na S. Pak π nazveme stacionární rozdělení $\{X_n\}$, pokud platí

$$\pi^T \mathbf{P} = \pi^T.$$

- Stacionární rozdělení nemusí existovat.
- Je-li počáteční rozdělení rovno stacionárnímu rozdělení, pak je řetězec striktně stacionární.
- Existuje-li limitní rozdělení $\mathbf{a}$ na S (tj. $a_i = \lim_{n \to \infty} p_i(n)$ pro všechna $i \in S$), pak je toto rozdělení stacionární. Pokud je řetězec nerozložitelný a všechny stavy jsou trvalé nenulové a neperiodické, pak platí i opačná implikace.
- V konečném řetězci vždy existuje stacionární rozdělení. To je určeno jednoznačně právě tehdy, když jsou všechny trvalé stavy vzájemně dosažitelné.
- Je-li π stacionární rozdělení a $i \in S$ přechodný, pak $\pi_i = 0$.