NEKONEČNÉ NEROZLOŽITELNÉ ŘETĚZCE

1.4.2019

1. Uvažujme sérii bernoulliovských pokusů s pravděpodobností zdaru $p \in (0,1)$ a nezdaru $q = 1-p$. Definujme jako X_n délku série zdarů (tzv. *success runs in Bernoulli trials*), které jsme dosáhli v n-tém pokuse (jestliže n-tý pokus skončil nezdarem, je $X_n = 0$).
   (a) Ukažte, že $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec a určete jeho matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Rozmyslete si tvar $\mathbf{P}^k$.
   (b) Určete stacionární rozdělení (existuje-li) a klasifikujte stavy tohoto řetězce.

2. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a určete stacionární rozdělení (existuje-li):

$$\text{(a)}\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

   kde $p_i \in (0,1)$ a $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

3. Sisyfos má za trest vykulit těžký balvan na nekonečně vysoký kopec. Nezávisle na předchozí historii a také na výšce, ve které se balvan v čase n nachází, jej Sisyfos v souladu se svým úkolem vykulí o 1 metr výše s pravděpodobností 1/4, s pravděpodobností 1/2 si odpočine tak, že kámen zůstane ve stejné výšce, a s pravděpodobností 1/4, roztrpčen nad marností své snahy, nechá balvan skutálet zpět na základní úroveň. Označme jako X_n výšku balvanu v čase $n \in \mathbb{N}$ nad základní úrovní (v metrech).
   (a) Uvědomte si, že $\{X_n\}$ tvoří Markovův řetězec a sestavte jeho matici pravděpodobností přechodu. Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení, pokud existuje.
   (b) Rozhodněte, zda Sisyfos v nekonečném časovém horizontu splní zadaný úkol: Zda platí $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty$ pro $n \to \infty$, tj. zda pro každé $K > 0$ platí $\mathsf{P}(|X_n| > K) \to 1$ pro $n \to \infty$.

4. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s následující maticí pravděpodobností přechodu a nalezněte stacionární rozdělení, pokud existuje:

$$\text{(a)}\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

   kde $p_i \in (0,1)$ and $q_i = 1 - p_i$, $i \in \mathbb{N}_0$.

5. Adam a Bedřich opakovaně hází kostkou. Pokud padne číslo větší než 4, získává bod Adam, pokud padne číslo menší než 3, získává bod Bedřich. Pokud padne 3 nebo 4, získávají oba půl bodu. Označme $\{X_n\}$ absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů Adama a Bedřicha po n hodech. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. Klasifikujte stavy řetězce a určete stacionární rozdělení, existuje-li.

NEKONEČNÉ NEROZLOŽITELNÉ ŘETĚZCE. Nechť $\{X_n\}$ je **nerozložitelný** homogenní MŘ se stavy $S = \mathbb{N}_0$ s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & \mathbf{q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

- Všechny stavy jsou **trvalé nenulové** právě tehdy, když **existuje stacionární rozdělení** $\pi^\top \mathbf{P} = \pi^\top$, $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$.
  V tomto případě pak
  $$\pi_j \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I[X_k = j] \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k = j) = \frac{1}{\mathsf{E}_j \tau_j(1)}.$$
  Je-li řetězec navíc aperiodický, pak existují i limity $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n = j) = \pi_j$.
- Všechny stavy řetězce jsou **trvalé** právě tehdy, když soustava $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}$, tj.
  $$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots$$
  má v $[0,1]^{\mathbb{N}}$ jediné řešení, a to $\mathbf{x} \equiv 0$. Pokud existuje řešení $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pak jsou všechny stavy **přechodné**.
  Idea zdůvodnění: Všechny stavy jsou stejného typu, takže stačí vyšetřovat stav 0. Označíme si jako $u_i = \mathsf{P}_i(\tau_0(1) < \infty)$ *pravděpodobnost, že řetězec někdy navštíví stav 0, startuje-li ze stavu i. Dále nechť* $\mathbf{u} = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, pak* $\mathbf{u}$ *splňuje analogickou rovnici jako pravděpodobnosti absorpce, tj.*
  $$\mathbf{u} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}\mathbf{u}.$$
  Vektor $\mathbf{1} = (1)_{i\in\mathbb{N}}$ *je vždy řešení, jelikož matice* $\mathbf{P}$ *je stochastická. Toto řešení je jediné možné v* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *právě tehdy, když má soustava* $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ *v* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *pouze triviální řešení. V takovém případě řetězec navštíví stav 0 s pravděpodobností 1 a tedy všechny stavy jsou trvalé .*

KLASIFIKACE STAVŮ: