Obecný proces množení a zániku
Systémy hromadné obsluhy
6.5.2019

1. V holičství pracují tři holiči. Každý z nich obsuhuje jednoho zákazníka v průměru 10 minut. Do holičství přichází v průměru 12 zákazníků za hodinu. V případě, že žádný z holičů není volný, zákazníci čekají v jedné společné frontě, přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako čtvrtý, odchází neobsloužen. Předpokládejme, že doby mezi příchody zákazníků i doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Označme jako X_t počet zákazníků v holičství v čase t.
   (a) Určete matici intenzit řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.
   (b) Nalezněte stacionární rozdělení počtu zákazníků v holičství.
   (c) Určete střední počet zákazníků ve frontě v ustáleném režimu, pravděpodobnost, že příchozí zákazník nebude muset čekat ve frontě, a pravděpodobnost, že zákazník odejde neobsloužen.

2. Uvažujme nekonečně velké parkoviště, na které přijíždějí auta podle Poissonova procesu tak, že za jednu hodinu přijedou v průměru čtyři auta. Doby parkování jednotlivých aut jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 30 minut. Určete stacionární rozdělení počtu parkujících aut na tomto parkovišti a střední počet zaparkovaných aut.

3. Na letišti uvažujeme pět přepážek pro odbavení cestujících. Předpokládejme, že příchody cestujících tvoří Poissonův proces. Pokud jsou všechny přepážky obsazené, řadí se cestující do jedné fronty, která může být libovolně dlouhá. Doby odbavení jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Nalezněte limitní rozdělení počtu cestujících v systému (u přepážek a ve frontě celkem), pokud cestující přicházejí v průměru každou minutu a doba odbavení trvá průměrně tři minuty.

4. Uvažujte systém hromadné obsluhy M/M/c pro $c \in \mathbb{N}$ s nekonečnou frontou a nechť X_t je počet zákazníků v systému v čase t. Napište matici intenzit tohoto řetězce a s využitím výsledků pro obecný proces množení a zániku rozhodněte, kdy existuje stacionární rozdělení, a případně napište jeho tvar.

5. Ve firmě je N počítačů, o které se stará $r < N$ správců. U každého počítače může dojít k problému, přičemž výskyt problému nezávisí na předchozím stavu počítače ani na stavu ostatních počítačů. V případě výskytu problému je okamžitě povolán jeden správce na jeho řešení. Pokud jsou všichni správci zaměstnáni, počítač nepracuje a čeká na vyřešení problému. Předpokládá se, že na jednom počítači pracuje jen jeden správce a že správci pracují nezávisle. U každého počítače jsou doby mezi výskyty problémů nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\lambda > 0$ a doby řešení problémů správci jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\mu > 0$. Nechť X_t je počet počítačů, které v čase t nepracují (tj. jsou opravovány nebo čekají na opravu).
   (a) Určete matici intenzit řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.
   (b) Nalezněte stacionární rozdělení řetězce.

Obecný proces množení a zániku s konečnou množinou stavů. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je HMŘ s množinou stavů $S = \{0, \dots, n\}$ a maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_i > 0$, $\mu_j > 0$, $i = 0, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$. Pak existuje stacionární rozdělení $\{X_t, t \geq 0\}$ a je tvaru

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \underbrace{\frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_k}}_{\rho_k} \pi_0 = \rho_k \pi_0 = \frac{\rho_k}{\sum_{j=0}^{n} \rho_j}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Obecný proces množení a zániku. Uvažujme HMŘ $\{X_t, t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \mathbb{N}_0$ a maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_i > 0$ a $\mu_j > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$. Potom je vnořený řetězec nerozložitelný. Jeho stavy jsou trvalé právě tehdy, když

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1\mu_2 \dots \mu_k}{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \infty.$$

Za této podmínky pak existuje invariantní míra $\{X_t, t \geq 0\}$ tvaru

$$\eta_k = \eta_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_k} \eta_0 = \rho_k \eta_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Stacionární rozdělení existuje právě tehdy, když $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty$. Za této podmínky a pokud bereme $\rho_0 = 1$, je stacionární rozdělení tvaru

$$\pi_k = \frac{\rho_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Systém hromadné obsluhy M/M/c je systém, ve kterém pracuje c stanic obsluhy. Doby mezi příchody jednotlivých zákazníků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\lambda > 0$ (tj. příchody zákazníků tvoří Poissonůlv proces s intenzitou λ). Pokud kapacita obsluhy není dostačující, zákazníci vytvářejí frontu. Doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\mu > 0$. Po ukončení obsluhy zákazníci ze systému odcházejí. X_t je počet zákazníků v systému v čase t.