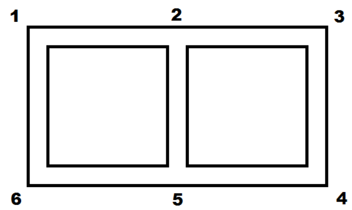
PRAVDĚPODOBNOSTI ABSORPCE, NEKONEČNÉ NEROZLOŽITELNÉ ŘETĚZCE
22.3.2018

1. Uvažujme Markovův řetězec se stavy $\{1, 2, 3, 4\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{20} & \frac{7}{20} & \frac{12}{20} \end{pmatrix}$$

Spočtěte pravděpodobnosti absorpce.

2. Mravenec běhá v níže uvedeném bludišti. V každém kroku si vybere jeden ze čtyř možných směrů, každý se stejnou pravděpodobností, tímto směrem se vydá a běží tak dlouho, jak jen to jde. Pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě. Označíme jako X_n polohu mravence v čase n (tj. po n rozhodovacích krocích).



   (a) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a klasifikujte stavy.
   (b) Určete pravděpodobnost absorpce.
   (c) Spočtěte stacionární rozdělení.

3. Uvažujme sérii bernoulliovských pokusů s pravděpodobností zdaru $p \in (0, 1)$ a nezdaru $q = 1 - p$. Definujme jako X_n délku série zdarů, které jsme dosáhli v n-tém pokuse (jestliže n-tý pokus skončil nezdarem, je $X_n = 0$).

   (a) Ukažte, že $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec a určete jeho matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Rozmyslete si i tvar $\mathbf{P}^k$.
   (b) Klasifikujte stavy a určete stacionární rozdělení (existuje-li).

4. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a určete stacionární rozdělení (existuje-li):

(a) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.

Pravděpodobnosti absorpce. Nechť $\{X_n\}_0^\infty$ je homogenní MŘ s konečně mnoha stavy a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Označme jako T množinu všech přechodných stavů a C množinu všech trvalých stavů. Pak je možné $\mathbf{P}$ přeuspořádat do tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}^* = \{p_{ij}, i, j \in C\}$, $\mathbf{Q} = \{p_{ij}, i \in T, j \in C\}$, $\mathbf{R} = \{p_{ij}, i, j \in \mathrm{T}\}$.

- Označme jako $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\}$ čas výstupu z množiny přechodných stavů T. Pravděpodobnost absorpce značíme $u_{ij} = \mathsf{P}_i(X_\tau = j)$, $i \in T$, $j \in C$ a udává nám, s jakou pravděpodobností řetězec startující ze stavu $i \in T$ ze všech trvalých stavů poprvé vstoupí právě do stavu $j \in C$.
- Platí
$$u_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in S} p_{ik} u_{kj},$$
a proto matici absorpce $\mathbf{U} = \{u_{ij}, i \in T, j \in C\}$ lze získat ze vzorce
$$\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{R}^n \mathbf{Q}.$$
Matice $\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$ se nazývá fundamentální matice řetězce $\{X_n\}$.

Nekonečné nerozložitelné řetězce. Nechť $\{X_n\}$ je **nerozložitelný** homogenní MŘ se stavy $S = \mathbb{N}_0$ s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & \mathbf{q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

- Všechny stavy řetězce jsou **trvalé** právě tehdy, když soustava $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}$, tj.
$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots$$
má v $[0,1]^{\mathbb{N}}$ jediné řešení, a to $\mathbf{x} \equiv 0$. Pokud existuje řešení $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pak jsou všechny stavy **přechodné**.
- Všechny stavy jsou **trvalé nenulové** právě tehdy, když existuje stacionární rozdělení $\pi^T \mathbf{P} = \pi^T$, $\sum_{i=0}^\infty \pi_i = 1$.
V tomto případě pak
$$\pi_j \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I[X_k = j] \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k = j) = \frac{1}{\mathsf{E}_j \tau_j(1)}.$$
Je-li řetězec navíc aperiodický, pak existují i limity $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_j(X_n = j) = \pi_j$.