Výsledky příkladů ze cvičení

Poslední změna 19. května 2019

Cvičení 1: Klasická pravděpodobnost

1. karty s vracením
   (a) $\frac{31\cdot 30\cdot 29}{32^3}$
   (b) $\frac{147}{2048}$
   (c) $\frac{323}{4096}$

   karty bez vracení

   (a) 1
   (b) $\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{2}}{\binom{32}{4}}$
   (c) $\frac{2381}{35\,960}$

2. sekretářka:
   (a) $1 - 1/2 + 1/3! - \cdots + (-1)^n 1/n! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}1/k! = 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
   (b) $1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \to 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - 1/\mathrm{e}$ pro $n \to \infty$

3. Maxwell-Boltzman
   (a) $\mathsf{P}(A_k) = \binom{r}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$ pro $k = 0, 1, \ldots, r$ a $\mathsf{P}(A_k) = 0$ pro $k > r$
   (b) $\mathsf{P}(C) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^r$ pro $r \geq n$ a $\mathsf{P}(C) = 0$ pro $r < n$
   (c) $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

4. Bose-Einstein
   (a) $\binom{n+r-1}{r}$ možností
   (b) $\mathsf{P}(A_k) = \frac{\binom{n+r-k-2}{r-k}}{\binom{n+r-1}{r}} = \frac{r!(n+r-2-k)!(n-1)}{(r-k)!(n+r-1)!}$ pro $k = 0, 1, \ldots, r$ a $\mathsf{P}(A_k) = 0$ pro $k > r$
   (c) $\mathsf{P}(C) = \frac{(r-1)!r!}{(n+r-1)!(r-n)!}$ pro $r \geq n$ a $\mathsf{P}(C) = 0$ pro $r < n$
   (d) $\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}$ pro $k = 0, 1, \ldots$

5. narozeniny: $\mathsf{P}(A_n) = 1 - \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right)$; $n \geq 41$

Cvičení 2: Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. pouze pokud $\mathsf{P}(A) = 0$ nebo $\mathsf{P}(B) = 0$

2. 2 kostky: a) 2/5, b) jsou závislé, c) 6/11

3. 2 kostky: Jsou po dvou nezávislé. Nejsou nezávislé, protože $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$

4. dlouhé vlasy: a)0.31 b) $24/31 = 0.7741935$
5. Mince
   (a) $\mathsf{P}(\text{odměna}) = 2/5$, a proto je pravděpodobnější, že odměnu nedostaneme
   (b) $\mathsf{P}(n \text{ mincí}|\text{není odměna}) = \dfrac{5}{3}\dfrac{2(2^n-1)}{6^n}$ pro $n = 1, 2, \ldots,$

   $\mathsf{P}(n \text{ mincí}| \text{ odměna}) = 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$ pro $n = 1, 2, \ldots$
6. K $\to$ F $\to$ C
   (a) Cyril 25/91 (Karel 36/91, Franta 30/91)
   (b) $\dfrac{91}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3k-2}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a $1/6$ pro $k = 0$
7. (a) $b/(a+b)$, (b) $b/(a+b)$
8. lovci: $3/29, 8/29, 18/29$
9. tři truhly: $2/3$

Cvičení 3: Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

1. mince:
   (a) X nabývá hodnot $0, 1, 2$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(X = 1) = 2/3$ a $\mathsf{P}(X = 2) = 1/12$
   (b) $P_X(B) = 1/4 \cdot \delta_0(B) + 2/3 \cdot \delta_1(B) + 1/12 \cdot \delta_2(B)$; F je po částech konstantní, má skoky v bodech 0,1 a 2 o velikostech $1/4, 2/3$ a $1/12$.
   (c) $\mathsf{E}X = 5/6$, $\mathsf{var}\, X = 11/36$
   (d) $Y = 100X$, $\mathsf{E}Y = 100 \cdot 5/6$, $\mathsf{var}\, Y = 100^2 \cdot 11/36$
2. X je náhodná veličina, Y není
3. (a) alternativní rozdělení s parametrem p, $\mathsf{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$,
   (b) $\mathsf{E}X = p$, $\mathsf{var}\, X = p(1-p)$
4. test:
   (a) $\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k}(1/4)^k(3/4)^{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$,
   binomické rozdělení s parametry n a $1/4$, tj. $\mathsf{Bi}(n, 1/4)$
   (b) $\mathsf{E}X = n/4$,
   (c) $\mathsf{var}\, X = 3n/16$
   (d) $a = 3$
   (e) $\mathsf{E}X = n/k$, $\mathsf{var}\, X = n(k-1)/k^2$, rozptyl je maximální pro $k = 2$
5. stanice:
   (a) $\mathsf{E}X = \lambda$
   (b) $\mathsf{var}\, X = \lambda$
6. loterie: geometrické rozdělení $\mathsf{P}(X = k) = (1-p)^k p$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathsf{E}X = (1-p)/p$

Cvičení 4: Náhodná veličina — Spojité rozdělení

1. (a) $P_X(B) = \int_{B\cap(-1,1)} 1/2dx = \frac{1}{2}\lambda(B\cap(-1,1))$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{x+1}{2} & x \in (-1,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(b) $\mathsf{P}(X=0)=0$, $\mathsf{P}(X \in [-1/2, 1/3)) = 5/12$

(c) $\mathsf{E}X = 0$, $\mathsf{var}\, X = 1/3$,

(d) medián $F^{-1}(1/2) = 0$

(e) distribuční funkce

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

hustota $f_Y(y) = 1/[2\sqrt{y}]$ pro $y \in (0,1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak

(f) $\mathsf{E}Y = 1/3$, $\mathsf{var}\, Y = 4/45$

(g) $\mathsf{E}Z = \pi/2$

2. (a) $c = 1/5$, jde o exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 1/5$

(b) $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $F(x) = 0$ pro $x < 0$,

(c) $\mathsf{E}X = 5$

(d) $\mathsf{var}\, X = 25$

(e) plyne po rozepsání pomocí distribuční funkce

(f) $F^{-1}(u) = -5\log(1-u)$, medián $F^{-1}(1/2) = 5\log 2$

(g) $Y = 5 + 3X$, $\mathsf{E}Y = 20$, $\mathsf{var}\, Y = 9 \cdot 25$, rozdělení:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-(y-5)/15}, & y \geq 0 \end{cases}$$

3. (a) nutně $a > 1$, potom $c = a - 1$,
$\mathsf{E}X = (a-1)/(a-2)$ pro $a > 2$ a $\mathsf{E}X = \infty$ (tj. neexistuje) pro $a \in (1,2]$

(b) $a \in \mathbb{R}$ libovolné, $c = 1/\pi$, $\mathsf{E}X$ neexistuje (integrál je neurčitý výraz)

4. $\mathsf{E}X = 0$, $\mathsf{var}\, X = 1$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{X^2/4} = \sqrt{2}$

5. distribuční funkce:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ 1/2 + \arcsin y/\pi, & -1 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

a hustota $f_Y(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$ pro $y \in (-1,1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak. $\mathsf{E}Y = 0$

Cvičení 5: Náhodné vektory

1. děti:

   (a) sdružené rozdělení

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	0	1/8
1	0	1/4	1/8
2	1/8	1/4	0
3	1/8	0	0

   Marginální rozdělení Y je $\mathsf{Bi}(2, 1/2)$ a X je $\mathsf{Bi}(3, 1/2)$.

   (b) Jsou závislé. $\mathsf{cov}\,(X, Y) = -\frac{1}{2}$, $\rho_{XY} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. testy:

   (a) $c = 1$

   (b) $f_X(x) = x + 1/2$ pro $x \in (0, 1)$ a $f_X(x) = 0$ jinak;
   $f_Y(y) = y + 1/2$ pro $y \in (0, 1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak.

   (c) Veličiny X a Y jsou závislé. $\mathsf{cov}\,(X, Y) = -1/144$, $\rho_{XY} = -1/11$

   (d) $\mathsf{P}(X > Y) = 1/2$

   (e) $\mathsf{E}Z = 0$, $\mathsf{var}\, Z = 1/6$

   (f) $\mathsf{E}W = 2(e - 1)$

   (g) distribuční funkce

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \min(x, 1) \min(y, 1)[\min(x, 1) + \min(y, 1)], & x, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

3.(a)

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = \chi_A(1) \cdot \frac{1}{2}\lambda\left((-1, -1/2) \cap B\right) + \chi_A(0) \cdot \frac{1}{2}\lambda\left((-1/2, 1) \cap B\right)$$

   a tedy

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = \iint_{A\times B} f(x, y) d\nu(x) d\lambda(y),$$

   kde ν je čítací míra, λ Lebesgueova míra a f je R-N derivace

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 1, y \in (-1, -1/2), \\ \frac{1}{2} & x = 0, y \in (-1/2, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (b) Jsou závislé.

4. součástky:

   (a) obě součástky mají exponenciální rozdělení: $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}$ pro $x > 0$ a $f_X(x) = 0$ jinak, $f_Y(y) = 1/2\mathrm{e}^{-y/2}$ pro $y > 0$ a $f_Y(y) = 0$ jinak. Doby životnosti jsou nezávislé a tedy $\mathsf{cov}\,(X, Y) = 0$.

   (b) $\mathsf{P}(X > Y) = 1/3$

5. samička:
   (a) $\mathsf{P}(X = k) = (\lambda p)^k \mathrm{e}^{-\lambda p}/k!$, $k = 0, 1, \ldots$ tj. počet narozených jedinců má Poissonovo rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda p)$ a tedy $\mathsf{E}X = \lambda p$.
   (b) $\mathsf{P}(N = n|X = k) = \dfrac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}$ pro $n = k, k+1, \ldots$.
   (c) Veličiny jsou závislé.

6. (a) $\mathsf{cov}\,(X, Y) = 0$, veličiny jsou závislé. (b) $\rho_{XZ} = 1$.

7. jsou závislé, $\mathsf{cov}\,(X, Y) = 1/36$

Cvičení 6: Náhodné vektory II

1. součet dvou nezávislých:
   (a) $\mathsf{E}Z = 2/\lambda$, $\mathsf{var}\,Z = 2/\lambda^2$, hustota Z: $g(z) = \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z}$, $z > 0$ a $g(z) = 0$ jinak.
   (b) $\mathsf{E}Z = 1$, $\mathsf{var}\,Z = 1/6$, hustota Z:

$$g(z) = \begin{cases} z & z \in (0,1), \\ 2-z & z \in [1,2], \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

2.(a) hustota Z (např. věta o rozdělení součtu)

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & z \in (0,1), \\ z(2-z) & z \in [1,2], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (b) $\mathsf{E}Z = 7/6$, $\mathsf{var}\,Z = 5/36$
   (c) vektor $(Z, W)^\top$ má spojité rozdělení s hustotou

$$h(z, w) = \begin{cases} z/2 & -z < w < 2-z, z-2 < w < z, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (d) hustota W:

$$h_W(w) = \begin{cases} 1-|w| & w \in (-1,1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   $\mathsf{E}W = 0$, $\mathsf{var}\,W = 1/6$
   (e) $\mathsf{E}U = 1$
   (f) $\rho_{Z,W} = 0$

3. Minimum a maximum
   (a) $F_U(u) = [F(u)]^n$, $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1}f(u)$,
   (b) $F_V(v) = 1 - [1-F(v)]^n$, $f_V(v) = n[1-F(v)]^{n-1}f(v)$,
   (c) $\mathsf{E}V = \frac{1}{n+1}$, $\mathsf{E}U = \frac{n}{n+1}$

4. škola:
   (a) $Z = X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$,
   (b) rozdělení počtu dívek X za podmínky $Z = n$ je binomické s parametry n a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

5. (a) hustota Z
$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{4z^2-1}{2z^2} & z \in (1/2, 1], \\ \dfrac{4-z^2}{2z^2} & z \in (1,2), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (b) hustota W
$$h(w) = \begin{cases} \ln w & w \in (1,2], \\ 2\ln 2 - \ln w & w \in (2,4), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

6. (a) $\mathsf{Po}(n\lambda)$, (b) tzv. gama rozdělení s hustotou $g(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda z} I(z > 0)$.

Cvičení 7: Borelova a Catelliho věta

1. kostka: (a) 1 (b) 0 (c) 1,

2. 0

3. (a) 0
   (b) 0
   (c) 1
   (d) 0

4. viz další cvičení

Cvičení 8: Limitní věty I.

1. (a) platí $X_n \xrightarrow{P} 0$ pro všechna $\alpha > 0$,
   (b) pro $\alpha > 1$ platí i konvergence k 0 s.j., pro $\alpha \in (0, 1]$ neplatí $X_n \to 0$ s.j. (využijí se B-C zákony)

2. (a) důkaz plyne přímo z definice a rozdělení U_n, (b) využijí se B-C zákony

3. (a) plyne okamžitě ze SZVČ, (b) důsledek Čebyševovy nerovnosti

4. (a) plyne okamžitě ze SZVČ, (b) $n \geq 5 \cdot 10^4$
   Vysvětlení k bodu (b): Jestliže neznáme p (typicky jej chceme právě pomocí relativní četnosti odhadnout), chceme mít pro n „univerzální mez“, která na p nezávisí. Proto využijeme, že pro $p \in (0, 1)$ je $p(1-p) \leq 1/4$.

5. ano, platí $(\overline{X}_n - \frac{1}{n}\mathsf{E}Y_1 \sum_{k=1}^{n} k^q) \to 0$ s.j. Tj. pro $n \to \infty$ se $\overline{X}_n$ chová asymptoticky s.j. jako $\mathsf{E}Y_1/(q+1) \cdot n^q$

6. platí $\overline{X}_n \to 0$ s.j.

7. Je nutné využít, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_1| \geq n) \leq \mathsf{E}|X_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_1| \geq n) + 1.$$

Potom již vše plyne z Borelovy věty. Uvedené tvrzení viz skripta Dupač, Hušková Lemma 4.7., dokáže se pomocí „horních a dolních Riemanovských“ sum pro daný integrál.

8. neplatí, protože $\mathsf{E}|X_1| = \infty$

Cvičení 8: Limitní věty II.

1. (a) $2\Phi(2) - 1 = 0.954$,
   (b) $U_n \sim \mathsf{N}(n\mu, n\sigma^2)$, $\overline{X}_n \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2/n)$, $Z_n \sim \mathsf{N}(0,1)$,
   (c) $n \geq 22$.

2. hody mincí: $\mathsf{P}(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60) = \sum_{k=61}^{100} \binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}} = 0.018$ použití CLV: $\mathsf{P}(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60) \doteq 1 - \Phi(2) = 0.023$.

3. večírek – řešení pomocí CLV
   (a) 0.159
   (b) alespoň 513 chlebíčků
   (c) nejvýše 96 hostů
   (d) CLV: $t \geq 25.8$, Čebyšev $t \geq 100$

4. mince: (a) Čebyšev $n \geq 50000$, (b) CLV $n \geq 9604$,

5. pojišťovna:
   (a) očekávaný zisk je 400 000 Kč,
   (b) pravděpodobnost ztráty je 0.056,
   (c) s pravděpodobností 0.9 bude zisk vyšší než 77 302 Kč
   (d) alespoň 2199 klientů

6. měli bychom zakoupit alespoň 75 žárovek

Cvičení 9: Bodový odhad.

1. (a) $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$, je to nestranný i konzistentní odhad λ,
   (b) $\bar{X}_n$
   (c) $\check{\lambda}_n$ je nestranný a není konzistentní, $\tilde{\lambda}_n$ není nestranný (je asymptoticky nestranný) a je konzistentní
   (d) W_n je nestranný a konzistentní odhad $\mathrm{e}^{-\lambda}$
   Návod: Definujeme $Y_i = I[X_i = 0]$ jsou iid z alternativního rozdělení s parametrem p_0.

(e) V_n není nestranný, ale je asymptoticky nestranný odhad $\mathrm{e}^{-\lambda}$
Návod: Konzistence plyne ze SZVČ a spojitosti fukce e^{-x}. Nestrannost se vyšetřuje pomocí znalosti rozdělení $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, které je $\mathsf{Po}(n\lambda)$. Pak dostaneme

$$\mathsf{E}V_n = \exp\{-n\lambda(1 - \mathrm{e}^{-1/n})\}.$$

Vyšetřením limity pak $\mathsf{E}V_n \to \mathrm{e}^{-\lambda}$ pro $n \to \infty$.

(f) U_n je nestranný i konzistentní odhad p_0
Návod: $U_n = \exp\left\{\overline{X}_n \frac{\log(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right\}$ a odtud pomocí SZVČ plyne konzistence. Výpočet $\mathsf{E}U_n$ se provede opět z rozdělení S_n jako $\mathsf{E}U_n = \mathsf{E}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n} = \cdots = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

(g) Pro výběr nejlepšího modelu je dále možné spočítat jejich rozptyly a zvolit ten s nejmenším rozptylem. Na základě tohoto kritéria bychom volili buď V_n nebo U_n. U_n je navíc nestranný, proto bychom doporučili pro odhad U_n.

(h) $\hat{\lambda} = 62/30 = 2.067$, pro p_0 máme tři možné odhady $\widehat{p_0} = (29/30)^{62} = 0.122$ nebo $\tilde{p_0} = \mathrm{e}^{62/30} = 0.127$ nebo $\check{p}_0 = 5/30 = 0.167$

2.(a) oběma metodami vychází $\widehat{p}_n = \bar{X}_n$

(b) je konzistentní, není nestranný, $\frac{n}{n-1}T_n$ je nestranný

3. $\widehat{b}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, jde o nestranný a konzistentní odhad b
Návod: Jedná se o normální rozdělení.

Cvičení 10: Bodový odhad II.

1. exp. rozdělení

(a) $T_n = \dfrac{1}{\overline{X}_n}$

(b) je konzistentní (SZVČ a věta o spojité transformaci)

(c) není nestranný, $\mathsf{E}T_n = \frac{n}{n-1}\lambda$, $V_n = \frac{n-1}{n}T_n$ je nestranný a konzistentní odhad λ

(d)

$$\operatorname{var} T_n = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}, \quad \operatorname{var} V_n = \frac{\lambda^2}{n-2}.$$

V_n má lepší rozptyl, je navíc nestranný, tudíž je lepší než T_n

2.(a) $T_n = \overline{X}_n - 1$, je nestranný i konzistentní

(b) $V_n = \min_{1\le i\le n} X_i$ je MLE odhad

(c) je konzistentní (vyšetří se z definice a pomocí Cantelliho věty)

(d) není nestranný $\mathsf{E}V_n = a + \frac{1}{n}$, $W_n = V_n - \frac{1}{n}$ je nestranný a konzistentní

(e) $\operatorname{var} T_n = \frac{1}{n}$, $\operatorname{var} W_n = \operatorname{var} V_n = \frac{1}{n^2}$. Nejlepší odhad je W_n.

3.(a) $T_n = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}$

(b) je konzistentní (plyne ze SZVČ pro náhodné veličiny $Y_i = \log X_i$),
není nestranný — pro vyšetření nestrannosti si můžeme všimnout, že $\log X_i$ má $\mathsf{Exp}(\theta)$ a tedy můžeme využít výsledky z příkladu 1(c)

(c) $U_n = \dfrac{\overline{X}_n}{\overline{X}_n - 1}$ Je to konzistentní odhad. O nestrannosti neumíme na základě našich znalostí rozhodnout (lze např. využít Jensenovu nerovnost pro střední hodnotu konvexní funkce, z které plyne, že odhad není nestranný).

(d) platí $p_2 = P(X_1 > 2) = 1 - F(2) = 2^{-(\theta+1)}$, což můžeme odhadnout pomocí následujících tří konzistentních odhadů

$$\widehat{p_2} = 2^{-(T_n+1)}, \quad \tilde{p_2} = 2^{-(U_n+1)}, \quad \check{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} I[X_i > 2]}{n}$$

4. (a) momentový odhad $T_n = 2\overline{X}_n - 1$, je nestranný a konzistentní

(b) MLE odhad $U_n = \max_{1\le i\le n} X_i$

(c) je konzistentní, není nestranný, protože $\mathsf{E} U_n = M - \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{i}{M}\right)^n$, ale je asymptoticky nestranný, protože $\sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{i}{M}\right)^n \to 0$ pro $n \to \infty$,
odhad $V_n = \max_{1\le i\le n} X_i + \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{i}{M}\right)^n$ by byl nestranný a konzistentní

Cvičení 11: Intervalový odhad

1. IQ

(a) Model: $X_1, \dots, X_n$ tvoří náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je neznámé.
Přesný intervalový odhad o spolehlivosti $1 - \alpha$

$$\left(\bar{X}_n - \frac{S_n t_{n-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{S_n t_{n-1}(1-\alpha/2}{\sqrt{n}}\right)$$

Tento interval překryje neznámou hodnotu μ s pravděpodobností $1 - \alpha$. Pro 95% spolehlivost dostáváme $(108,24; 111,51)$.

(b) jestliže $1 - \alpha$ roste, interval je širší; jestliže n roste, interval se zužuje

(c) Model: $X_1, \dots, X_n$ tvoří náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem $0 < \mathsf{var}\, X_1 < \infty$.
Assymptotický int. odhad o spolehlivosti $1 - \alpha$

$$\left(\bar{X}_n - S_n u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X}_n + S_n u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right)$$

Číselně pro 95% spolehlivost dostáváme $(108,37; 111,38)$.

(e) dolní 95% intervalové odhady $(108,61; \infty)$ (přesný pro normální model), $(108.52, \infty)$ (asymptotický pro L_2 model)

2. Góly:

(a) Asympt. intervalový odhad se spolehlivostí 95%: (2,77;3,07) (rozptyl odhadnut S_n^2) nebo $(2,76; 3,08)$ (rozptyl odhnadnut $\bar{X}_n$)

(b) provedeme příslušnou transformaci na meze z (a) a dostaneme $(0,046; 0,063)$

(c) vezmeme příslušné veličiny s alternativním rozdělením a dostaneme (0,025; 0,073)

3. pošta

(a) na základě CLV a Sluckého věty (rozptyl odhadnut jako $1/barX_n^2$) dostaneme (0,756;2,208)

(b) transformací (a) dostaneme (0,453;1,323)
(c) příslušnou transformací (b) dostaneme (0,596; 0,929)

4. Model: IQ dívek $X_1, \ldots, X_n$ tvoří náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu_1, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je neznámé. IQ chlapců $Y_1, \ldots, Y_m$ tvoří náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu_2, \sigma^2)$ (zde speciálně $m = n$) Oba výběry jsou vzájemně nezávislé.
   Pak přesný intervalový odhad $\mu_1 - \mu_2$ se spolehlivostí $1 - \alpha$ je
   $$\left(\bar{X}_n - \bar{Y}_m - S^* \sqrt{1/n + 1/m} \cdot t_{n+m-2}(1-\alpha/2), \bar{X}_n - \bar{Y}_m + S^* \sqrt{1/n + 1/m} \cdot t_{n+m-2}(1-\alpha/2)\right)$$
   kde $S^{*2} = \frac{1}{m+n-2}((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)$, číselně $(-0,239; 6,559)$.

5. (a) využijeme CLV a vztah mezi střední hodnotou a rozptylem a v tomto rozdělení a dostaneme $(0,414; 0,475)$
   (b) transformací (a) dostaneme $(0,620; 0,713)$

6. (a) z CLV analogicky jako v 2(c) $(0,257; 0,443)$
   (b) $n \geq 8740$