Náhodná veličina — Spojité rozdělení

14. 3. a 15. 3. 2019

1. Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = \big((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda\big)$, kde λ je Lebesgueova míra. Náhodná veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $X(\omega) = 2\omega - 1$.

(a) Určete rozdělení P_X a distribuční funkci F_X.

(b) Určete, s jakou pravděpodobností bude X rovno 0 a s jakou pravděpodobností bude náležet do intervalu $[-1/2, 1/3)$.

(c) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl X.

(d) Určete medián X.

(e) Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) veličiny $Y = X^2$.

(f) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y.

(g) Spočtěte střední hodnotu veličiny $Z = \dfrac{1}{\sqrt{1-X^2}}$.

2. Doba čekání na vlak (v minutách) má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c\, e^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota.

(b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji.

(c) Jaká je střední doba čekání na vlak?

(d) Spočtěte rozptyl doby čekání na vlak.

(e) Ověřte, že rozdělení X je „bez paměti“, tj. platí

$$\mathsf{P}(X > x + y \,|\, X > y) = \mathsf{P}(X > x), \quad \text{pro všechna } x, y > 0.$$

(f) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a načrtněte ji. Určete medián X.

(g) Během čekání na vlak si prohlížíte internet na mobilu, přičemž Vám za to Váš operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč a pak spojitou sazbu 3 Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte. Spočtěte rozdělení Y, střední hodnotu Y a rozptyl Y.

3. Uvažujme funkce

(a) $f(x) = c\, x^{-a}$ pro $x > 1$ a $f(x) = 0$ jinak,

(b) $g(x) = \dfrac{c}{1 + (x-a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pro které konstanty a, c je f (resp. g) hustota? Určete střední hodnotu odpovídající rozdělení s touto hustotou.

4. Pro veličinu X s normovaným normálním rozdělením $\mathsf{N}(0,1)$, tj. s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

určete $\mathsf{E}\, X$, $\mathsf{var}\, X$ a $\mathsf{E}\, e^{X^2/4}$.

5. Nechť má X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 2\pi]$. Určete rozdělení a střední hodnotu veličiny $Y = \sin X$.

Spojité rozdělení. Nechť X je náhodná veličina s rozdělením P_X. Je-li P_X absolutně spojitá vzhledem k Lebesguově míře, pak říkáme, že má X **spojité rozdělení**. Existuje tedy $f \geq 0$ tak, že

$$P_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Vlastnosti.

– Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$.

– Funkce f se nazývá **hustota**. Platí $1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

– Distribuční funkce F je absolutně spojitá a platí

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

– Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Je-li $a < b$, pak

$$\mathsf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

– **Střední hodnota** X se spočte jako

$$\mathsf{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(existuje-li)}.$$

Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $\mathsf{E}\,h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ (existuje-li).

– *Rozdělení náhodné veličiny* $Y = h(X)$: Distribuční funkci Y spočítáme z definice jako $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}(h(X) \leq y)$. Dále ekvivalentně upravíme nerovnost $[h(X) \leq y]$ a dostaneme tak vyjádření F_Y pomocí distribuční funkce F_X veličiny X. Hustotu Y pak získáme jako $f_Y = F_Y'$.

Kvantilová funkce. Pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F je kvantilová funkce $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ definována jako

$$F^{-1}(u) = \inf\big\{x : F(x) \geq u\big\}.$$

Pro spojité rozdělení s rostoucí F je F^{-1} **inverzní funkce** k F.
Medián veličiny X je taková hodnota $\hat{x}$, že $\mathsf{P}(X \leq \hat{x}) \geq 1/2$ a zároveň $\mathsf{P}(X \geq \hat{x}) \geq 1/2$. Pro náhodnou veličinu se spojitým rozdělením můžeme medián vyjádřit jako $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$. Je-li F rostoucí, pak $\hat{x}$ je určeno jednoznačně.

Gama funkce. Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. gama funkci, která je pro $p > 0$ definovaná jako

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

– $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$. Speciálně, je-li $n \in \mathbb{N}$, pak $\Gamma(n) = (n-1)!$,

– $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,

– pro libovolné $a > 0$ platí

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$