Náhodné vektory I.

21. 3. 2019 a 22. 3. 2019

1. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
   (a) Odvoďte sdružené rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^\top$ i obě marginální rozdělení.
   (b) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a určete jejich kovarianci a korelaci.
2. Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ udává procentuální úspěšnost náhodně vybraného studentu v testu z matematiky (X) a z fyziky (Y). Na základě zkušenosti lze předpokládat, že $(X, Y)^\top$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu
$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$.
   (b) Určete marginální rozdělení veličin X a Y.
   (c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a určete jejich kovarianci a korelaci.
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student dosáhne lepšího výsledku z matematiky než z fyziky?
   (e) Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X - Y$.
   (f) Spočtěte střední hodnoty veličiny W, kde $W = \exp(X + Y)$.
   (g) Zapište distribuční funkci $F(x, y)$ náhodného vektoru $(X, Y)^\top$.
3. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = \big((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), \lambda\big)$, kde λ je Lebesgueova míra. Na tomto prostoru máme definovány náhodné veličiny X a Y jako $X(\omega) = I(\omega < 1/4)$ a $Y(\omega) = 2\omega - 1$.
   (a) Určete rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^\top$.
   (b) Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé.
4. Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé? Jaká je jejich kovariance?
   (b) S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?
5. Samička hmyzu naklade N vajíček, kde N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\mathsf{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živý jedinec je $p \in (0,\ 1)$.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě k živých jedinců? Jaký je očekávaný počet živých jedinců?
   (b) Jaké je rozdělení N, jestliže víme, že se vylíhlo právě k živých jedinců?
   (c) Jsou veličiny udávající počet nakladených vajíček a počet narozených jedinců nezávislé?
6. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$.
   (a) Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y. Jsou X a Y nezávislé?
   (b) Označme $Z = 2X + 1$. Spočtěte koeficient korelace ρ_{XZ}.
7. Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ má rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x, y) :\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1],\ y \geq x\}$. Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a spočtěte jejich kovarianci.

Marginální rozdělení: Uvažujme náhodný vektor $(X, Y)^\top$ se dvěma složkami a s rozdělením $P_{(X,Y)}$ na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Marginální rozdělení náhodné veličiny X je

$$P_X(B) = P_{(X,Y)}(B \times \mathbb{R}) = \mathsf{P}(X \in B, Y \in \mathbb{R}).$$

(a) Jestliže má $(X, Y)^\top$ spojité rozdělení s hustotou $f(x, y)$, pak X i Y mají spojité rozdělení a marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

(b) Jestliže má $(X, Y)^\top$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak X i Y mají diskrétní rozdělení a marginální rozdělení veličiny X spočteme jako

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Nezávislost: Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, pokud pro libovolné množiny $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí

$$\mathsf{P}(X \in B, Y \in C) = \mathsf{P}(X \in B)\,\mathsf{P}(Y \in C).$$

(a) Jestliže má $(X, Y)^\top$ spojité rozdělení s hustotou f, X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Jestliže má $(X, Y)^\top$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\,\mathsf{P}(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

Kovariance a korelace: Nechť $\mathsf{E}\,X^2 < \infty$, $\mathsf{E}\,Y^2 < \infty$. Kovariance $\mathsf{cov}\,(X, Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\mathsf{cov}\,(X, Y) = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\,X)(Y - \mathsf{E}\,Y) = \mathsf{E}\,(XY) - (\mathsf{E}\,X)(\mathsf{E}\,Y).$$

Koeficient korelace $\mathsf{cor}(X, Y) = \rho_{XY}$ je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\mathsf{cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\mathsf{var}\,X}\,\sqrt{\mathsf{var}\,Y}},$$

je-li $\mathsf{var}\,X, \mathsf{var}\,Y > 0$. Platí vždy $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.

Vztahy pro střední hodnotu a rozptyl lineární kombinace: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

$$\mathsf{E}\,(aX + bY) = a\,\mathsf{E}\,X + b\,\mathsf{E}\,Y, \quad \mathsf{var}\,(aX + bY) = a^2\,\mathsf{var}\,X + b^2\,\mathsf{var}\,(Y) + 2ab\,\mathsf{cov}\,(X, Y)$$

za předpokladu, že momenty na pravých stranách existují.