Limitní věty I.

11. 4. a 12. 4. 2019

1. Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro které $\mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^{\alpha}$ a $\mathsf{P}(X_n = 1) = 1/n^{\alpha}$, kde $\alpha > 0$.
   (a) Zjistěte, zda X_n konverguje k 0 v pravděpodobnosti.
   (b) Zjistěte, pro která α konverguje X_n k 0 skoro jistě.

2. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1. Definujme $U_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Ukažte, že
   (a) U_n konverguje k 0 v pravděpodobnosti pro $n \to \infty$,
   (b) U_n konverguje k 0 skoro jistě pro $n \to \infty$.

3. Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečným rozptylem.
   (a) Ukažte, že $\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.
   (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti ukažte, že pro $q < 1/2$ platí $n^q(\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

4. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných pokusů, z nichž každý skončí úspěchem s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ a neúspěchem s pravděpodobností $1 - p$.
   (a) Ukažte, že relativní četnosti úspěchů v n pokusech ν_n konvergují k p s.j. pro $n \to \infty$.
   (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti určete, kolik musíme provést pokusů, aby s pravděpodobností alespoň 95 % nebyla odchylka ν_n od p větší než 0.01.

5. Uvažujme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ s konečným rozptylem. Definujme veličiny $X_k = k^q Y_k$, $q \in (0, 1/2)$, $k = 1, 2, \dots$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Pokud ano, vyjádřete co nejvíce explicitně, co nám říká.

6. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových, že
$$\mathrm{P}(X_k = k^{\lambda}) = \mathrm{P}(X_k = -k^{\lambda}) = \frac{1}{2},$$
   kde $\lambda < \frac{1}{2}$ je nějaká konstanta. Rozhodněte, zda posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel a pokud ano, napište jeho znění.

7. Nechť X_n jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Ukažte, že
   (a) je-li $\mathsf{E}|X_1| = \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nekonečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.
   (b) je-li $\mathsf{E}|X_1| < \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nejvýše konečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.

8. Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se spojitým rozdělením s hustotou $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$. Rozhodněte, zda $\overline{X}_n$ konverguje pro $n \to \infty$ skoro jistě k nějaké konstantě.

Konvergence náhodných veličin Nechť $X_1, X_2, \dots$ a X jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Řekneme, že X_n konverguje k X skoro jistě pro $n \to \infty$, značíme $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} X$, jestliže

$$\mathsf{P}\big(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\big) = 1.$$

Řekneme, že X_n konverguje k X v pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, značíme $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\big) = 0.$$

Silný zákon velkých čísel: Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náhodných veličin a definujme $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Řekneme, že $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel, pokud existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $|\overline{X}_n - a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0$.

- **(SZVČ pro nestejně rozdělené veličiny)** Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých veličin takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{var}\, X_n}{n^2} < \infty$. Pak $(\overline{X}_n - \mathsf{E}\overline{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0$.
- **(SZVČ pro stejně rozdělené veličiny)** Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin. Pak

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \mu \text{ pro nějaké } \mu \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{E}|X_1| < \infty.$$

V takovém případě $\mu = \mathsf{E}X_1$.

Čebyševova nerovnost: Je-li $X \in L_2$, pak

$$\mathsf{P}\big(|X - \mathsf{E}X| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathsf{var}\, X}{\varepsilon^2} \quad \text{pro všechna } \varepsilon > 0.$$