Limitní věty II.

25.4. a 26.4. 2019

1. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.
   (a) Určete, s jakou pravděpodobností leží X_1 v intervalu $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.
   (b) Jaké je rozdělení veličin $U_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ a $Z_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$?
   (c) Nechť $\mu = 1$ a $\sigma^2 = 4$. Jak velké n je třeba zvolit, abychom měli zaručeno, že $\overline{X}_n$ bude kladné číslo s pravděpodobností alespoň 0.99?

2. Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech symetrickou mincí padne rub více než 60 krát? Vyjádřete tuto pravděpodobnost přesně i pomocí CLV.

3. Pořádáte narozeninový večírek pro 100 hostů. Lze předpokládat, že počet chlebíčků, které sní náhodně vybraný host, je náhodná veličina se střední hodnotou 5 a rozptylem 1 a že jednotliví hosté konzumují nezávisle na sobě.
   (a) S jakou pravděpodobností sní hosté méně než 490 chlebíčků?
   (b) Kolik musíte objednat chlebíčků, aby jich byl nedostatek (hosté by měli ještě hlad) s pravděpodobností menší než 0.1?
   (c) Kolik hostů může přijít na oslavu, jestliže chcete mít jistotu, že objednaných 500 chlebíčků bude stačit s pravděpodobností větší než 95 %?
   (d) Označme jako C celkový počet chlebíčků, které sní pozvaných 100 hostů. Nalezněte $t > 0$ takové, aby platilo
   $$\mathsf{P}(-t < C - 500 < t) \geq 0.99.$$
   Řešte pomocí CLV i pomocí Čebyševovy nerovnosti a výsledky porovnejte.

4. Nechť ν_n značí relativní četnost líců v n hodech mincí (mince je symetrická a hody provádíme nezávisle). Zjistěte, kolik musíme provést hodů, aby pravděpodobnost jevu $\big[|\nu_n - 1/2| \leq 0.01\big]$ byla alespoň 0.95? Řešte pomocí Čebyševovy nerovnosti i pomocí CLV a výsledky porovnejte.

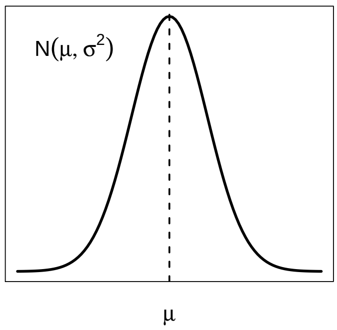
5. Pojišťovna má pojištěno 1 000 osob stejného věku. Pravděpodobnost úmrtí v daném roce je u každého pojištěného 0,01. Pojištěnci platí roční pojistné 1 200 Kč a v případě úmrtí je oprávněné osobě vyplaceno 80 000 Kč.
   (a) Jaký je v daném roce očekávaný zisk (resp. ztráta) pojišťovny?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že pojišťovna utrpí v daném roce ztrátu?
   (c) Jaký zisk je ředitel pojištovny schopen garantovat představenstvu s pravděpodobností 90 %?
   (d) Kolik by musela mít pojišťovna klientů (při stávajícím nastavení výše plateb), aby s pravděpodobností alespoň 99 % vydělala více než 10 000 Kč ročně?

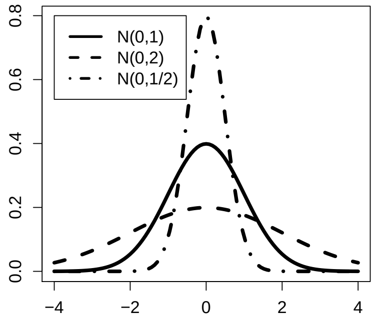
6. Životnost jedné žárovky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 10 hodin. Jakmile se jedna žárovka porouchá, nahradíme ji ihned další. Kolik máme zakoupit žárovek, abychom měli jistotu, že budeme moci svítit alespoň 600 hodin s pravděpodobností alespoň 95%?

Normální rozdělení. Normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ je spojité rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá **normované** normální rozdělení a značí se $\mathsf{N}(0, 1)$.





- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $\mathsf{E}X = \mu$ a $\mathsf{var}\, X = \sigma^2$.
  Dále $aX + b \sim \mathsf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Speciálně, $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0, 1)$.
- Jsou-li X, Y nezávislé normálně rozdělené a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $aX + bY$ má normální rozdělení (s příslušnými parametry).
- **Distribuční funkce** rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$ se značí jako Φ, tj. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$. Tento určitý integrál je možné spočítat jen **numericky**, a proto hodnoty funkce Φ nalezneme **v tabulkách** (nebo dostaneme pomocí vhodného softwaru). Ze symetrie platí

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

- Hodnoty $\Phi^{-1}(\alpha) = q_\alpha$ (tzv. kvantily $\mathsf{N}(0, 1)$) jsou také uvedeny v tabulkách a platí $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$.

Centrální limitní věta (CLV): Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s $0 < \mathsf{var}\, X_1 < \infty$. Pak

$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\,\mathsf{var}\, X_1}} \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

neboli ekvivalentně

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde Φ je distribuční funkci normálního rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$.
Zkráceně píšeme

$$Z_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\mathsf{var}\, X_1}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \overset{asympt.}{\sim} \mathsf{N}(0, 1)$$

a říkáme, že Z_n má asymptoticky normální rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$. CLV nám tedy říká, že distribuční funkce veličiny Z_n se při $n \to \infty$ blíží k Φ, tedy $\{Z_n\}$ konvergují v distribuci k náhodné veličině s $\mathsf{N}(0, 1)$ rozdělením. Pro n dost velké tedy lze uvažovat

$$\mathsf{P}(Z_n \leq x) \doteq \Phi(x).$$