Úvod do testování hypotéz
23.5. a 24.5. 2019

Provádíme průzkum, zda v nejmenované hospodě okrádají své hosty. Zakoupíme proto 10 piv a změříme jejich objem. Obdrželi jsme následující hodnoty (v litrech):

$$0.510,\ 0.462,\ 0.491,\ 0.466,\ 0.461,\ 0.503,\ 0.495,\ 0.488, 0.512, 0.505.$$

(Vychází $\overline{X}_{10} = 0.4893$, $S_{10} = \sqrt{S_{10}^2} = 0.01973$.) Předpokládejme, že data jsou realizace nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením.

(a) Odhadněte bodově střední hodnotu objemu jednoho piva. Lze z tohoto odhadu něco usuzovat o tom, zda v hospodě točí pivo „správně“?

(b) Máme podezření, že střední hodnota natočeného piva je menší než 0.5 l. Ověřte na základě naměřených hodnot pravdivost jeho výroku.
- Uveďte uvažovaný model a zformulujte nulovou a alternativní hypotézu.
- Uvědomte si, jaké naměřené hodnoty budou svědčit proti nulové hypotéze (ve prospěch alternativní). Na základě této úvahy nalezněte vhodný kritický obor.
- Proveďte test na hladině $\alpha = 0.05$ pro naše data. Jaký je závěr? Jak jej budeme interpretovat?
- Jaká je souvislost mezi výsledkem tohoto testu a horním intervalovým odhadem střední hodnoty?

(c) Chamtivého majitele dané hospody ale spíše zajímá, zda hostinský netočí více piva než by měl. Dal nám tedy za úkol otestovat na základě našich dat , zda tomu tak není.
- Formulujte nulovou a alternativní hypotézu pro tuto situaci.
- Jaká naměřená data by nyní svědčila proti nulové hypotéze ve prospěch alternativy? Na základě této úvahy nalezněte vhodný kritický obor.
- Proveďte test pro naše data. Jaký je závěr?

(d) Hostinský tvrdí, že střední hodnota natočeného piva je přesně 0.5 l. Ověřte tedy ještě i toto jeho tvrzení.
- Opět napište nulovou a alternativní hypotézu.
- Které hodnoty nyní svědčí proti H_0? Jak bude vypadat kritický obor?
- Jaká je souvislost s oboustranným intervalovým odhadem střední hodnoty?

Testování hypotéz = ověřování platnosti nějakého výroku pomocí naměřených dat.

↪ **Předpokládaný model**: $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z určitého rozdělení F_θ, kde $\theta \in \Theta$ neznáme. Naše data jsou konkrétní realizací tohoto výběru.

↪ **Hypotéza** je výrok týkající se neznámé hodnoty θ, o jehož platnosti chceme rozhodnout na základě nasbíraných dat.
Testuje se vždy tzv. **nulová hypotéza** $H_0 : \theta \in \Theta_0$ proti **alternativní hypotéze** $H_1 : \theta \in \Theta_1$, kde Θ_0 a Θ_1 jsou disjunktní podmnožiny Θ.

↪ **Test** je rozhodovací pravidlo, na jehož základě zamítáme nebo nezamítáme H_0.
Možná rozhodnutí:
- zamítáme H_0 ve prospěch H_1 (*naše data svědčí proti H_0, prokazujeme platnost H_1*)
- nezamítáme H_0 (*na základě našich dat nelze H_0 zamítnout, naše data nejsou v rozporu s H_0*)

$\leftrightsquigarrow$ **nesymetrie** mezi H_0 a H_1!

↪ Většinou nemůžeme rozhodnout s absolutní jistotou, která z hypotéz je platná $\rightsquigarrow$ můžeme se dopustit **chyby**. Mohou nastat tyto možnosti:

	Skutečnost	
Rozhodnutí	H_0 platí	H_1 platí
zamítáme H_0	chyba 1.druhu	OK
nezamítáme H_0	OK	chyba 2.druhu

Chyba 1.druhu je závažnější (falešně něco prokazujeme) $\rightsquigarrow$ její pravděpodobnost chceme kontrolovat.
Zvolíme α = maximální přípustná pravděpodobnost chyby 1.druhu (většinou $\alpha = 0.05$ nebo 0.01) a chceme

$$\mathsf{P}(\text{chyba 1. druhu}) = \mathsf{P}_{H_0}(\text{zamítáme } H_0) \leq \alpha.$$

↪ Test je popsán **kritickým oborem** W = množina výsledků pokusů, pro které H_0 zamítáme

- Je-li $(X_1, \dots, X_n) \in W$, pak H_0 zamítáme.
- Je-li $(X_1, \dots, X_n) \notin W$, pak H_0 nezamítáme.

Musí platit:

$$\mathsf{P}_\theta\big((X_1, \dots, X_n) \in W\big) \leq \alpha \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta_0$$

a mluvíme pak o testu na **hladině** α.