Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1.3. 2018 a 5.3. 2018

1. Nechť A a B jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
   (b) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1.kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?

3. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé? Jsou jevy A,B,C nezávislé?

4. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
   (b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

5. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu.
   (a) Je pravděpodobnější, že odměnu dostaneme nebo že odměnu nedostaneme?
   (b) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?

6. Karel, Franta a Cyril postupně hází kostkou v pořadí K $\to$ F $\to$ C. Komu první padne šestka, ten vyhrává, a hra v takovém případě končí.
   (a) Určete, s jakou pravděpodobností vyhraje Cyril.
   (b) Určete pravděpodobnost, že Franta hodil kostkou právě k-krát.

7. V krabici máme b bílých a a černých koulí. Postupně je taháme ven bez vracení.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli v prvním tahu? A ve druhém?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že $(n + 1)$-ní tažená koule bude bílá?

8. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance, který byl jednou střelou trefen. Určete pravděpodobnost toho, že kance zastřelil první, druhý nebo třetí střelec, jsou-li pravděpodobnosti zásahu po řadě rovny 0.2, 0.4 nebo 0.6.

9. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?

Opakování

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako
$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí
$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \ldots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \ldots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \ldots, n\}$ platí
$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \mathsf{P}(A_{i_r}).$$
(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť $A, B_1, B_2, \ldots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots$. Pak
$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta:

Nechť $A, B_1, B_2, \ldots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak
$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:

Jestliže náhodné jevy $A_1, \ldots, A_n$ splňují $\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak
$$\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathsf{P}(A_{n-1}| \cap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \cdots \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_1).$$