Náhodná veličina — Spojité rozdělení

15.3.2018 a 19.3.2018

1. Doba čekání na vlak (v minutách) má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota. Jak se toto rozdělení nazývá?
(b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji. Připomeňte základní vlastnosti distribuční funkce.
(c) Jaká je střední doba čekání na vlak?
(d) Spočtěte rozptyl doby čekání na vlak.
(e) Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat více než 15 minut? Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat přesně 15 minut? Jaká je pravděpodobnost, že doba čekání bude v intervalu $[5, 20]$ min?
(f) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a načrtněte ji. Určete medián X.
(g) Během čekání na vlak si prohlížíte internet na mobilu, přičemž Vám za to Váš operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč a pak spojitou sazbu 3Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte. Spočtěte rozdělení Y, střední hodnotu Y a rozptyl Y.

2. Poloměr koule má náhodnou délku R s rovnoměrným rozdělením na $[0, a]$, $a > 0$.

(a) Připomeňte si základní charakteristiky veličiny R (znáte z přednášky).
(b) Určete střední hodnotu a rozptyl objemu koule.

3. Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 1]$.

(a) Jsou jevy $[X^2 > \frac{1}{4}]$ a $[X > 0]$ nezávislé? Určete $\mathsf{P}(X^2 > \frac{1}{4} | X > 0)$.
(b) Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) veličiny $Y = X^2$.
(c) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y.

4. Ověřte, že rozdělení z příkladu 1 je „bez paměti“, tj. platí

$$\mathsf{P}(X > x + y | X > y) = \mathsf{P}(X > x), \quad \text{pro všechna } x, y > 0.$$

5. Nechť má X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 2\pi]$. Určete rozdělení a střední hodnotu veličiny $Y = \sin X$.

6. Uvažujme funkce

(a) $f(x) = c\,x^{-a}$ pro $x > 1$ a $f(x) = 0$ jinak,
(b) $g(x) = \dfrac{c}{1 + (x-a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pro které konstanty a, c je f (resp. g) hustota? Určete střední hodnotu odpovídající rozdělení s touto hustotou.

Spojité rozdělení. Nechť pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce $f \geq 0$ taková, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ (distribuční funkce F je absolutně spojitá). Pak říkáme, že X má **spojité rozdělení**. Funkce f se nazývá **hustota**.

Vlastnosti.

- Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$. (Rozdělení P_X je absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře.)
- **Rozdělení** veličiny X je charakterizováno hustotou $f \geq 0$. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak
$$\mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x.$$
Speciálně:
  (a) $1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$,
  (b) distribuční funkce F je spojitá na $\mathbb{R}$ a lze ji spočítat jako
$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$
  (c) pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)\mathrm{d}t = 0$,
  (d) je-li $a < b$, pak
$$\mathsf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
- **Střední hodnota** X se spočte jako
$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \quad \text{(existuje-li)}.$$
Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $\mathsf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$ (existuje-li).
- **Kvantilová funkce** $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ je definována jako
$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}.$$
Pro spojité rozdělení s rostoucí F je F^{-1} inverzní funkce k F. **Medián** veličiny X je taková hodnota $\hat{x}$, že $\mathsf{P}(X \leq \hat{x}) = \mathsf{P}(X \geq \hat{x}) = 1/2$, tj. spočteme jej jako $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$.
- Rozdělení náhodné veličiny $Y = h(X)$: Distribuční funkci Y spočítáme z definice jako $G(y) = \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}(h(X) \leq y)$. Dále ekvivalentně upravíme nerovnost $[h(X) \leq y]$ a dostaneme tak vyjádření G pomocí distribuční funkce F veličiny X. Hustotu Y pak získáme jako $g = G'$.

Gama funkce. Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. gama funkci, která je pro $p > 0$ definovaná jako
$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$
Platí
- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Speciálně, je-li $n \in \mathsf{N}$, pak $\Gamma(n) = (n-1)!$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
- pro libovolné $a > 0$ platí
$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$