Náhodné vektory II.

5.4. a 9.4. 2018

1. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X + Y$, jestliže
   (a) X, Y mají exponenciální rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$,
   (b) X, Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.
2. Náhodný vektor $(X, Y)'$ v příkladě 2 z minulého cvičení udával útratu za jídlo a pití na rodinné oslavě a měl sdružené rozdělení s hustotou $f(x, y) = x + y$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.
   (a) Určete rozdělení celkové útraty, tj. veličiny $Z = X + Y$.
   (b) Jaká je očekávaná hodnota celkové útraty? Jaký je rozptyl celkové útraty?
   (c) Určete rozdělení rozdílu mezi útratou za jídlo a pití, tj. veličiny $W = X - Y$, její střední hodnotu a rozptyl.
   (d) Určete střední hodnotu veličiny $U = \dfrac{1}{X+Y}$.
   (e) Spočtěte korelační koefient Z a W.
3. V daný den přijde do školy X dívek a Y chlapců, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.
   (a) Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
   (b) Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem n žáků?
4. Nechť jsou X, Y nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[1, 2]$.
   (a) Určete rozdělení veličiny $Z = \dfrac{X}{Y}$.
   (b) Určete rozdělení veličiny $W = XY$.
5. Na základě příkladů 1. a 3. si rozmyslete následující:
   (a) Jaké je rozdělení $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim \mathsf{Po}(\lambda)$ jsou nezávislé?
   (b$\star$) Jaká je hustota $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ jsou nezávislé?

Rozdělení součtu náhodných veličin: Nechť má náhodný vektor $(X,Y)'$ sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$. Potom má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x.$$

Speciálně, jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti momentů. Jestliže $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E} X_i$,
- $\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\, X + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)$,
- $\mathsf{Cov}\,(a_1 X_1 + a_2 X_2, a_3 X_3) = a_1 a_3 \mathsf{Cov}\,(X_1, X_3) + a_2 a_3 \mathsf{Cov}\,(X_2, X_3)$.

Věta o transformaci. Nechť $(X,Y)'$ má sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$. Nechť $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení s nenulovým Jakobiánem, tj. $J_g(x,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$, pro skoro všechna $(x,y)' \in S = \{(x,y)' : f(x,y) > 0\}$. Pak vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)' = g(X,Y)$ má hustotu h, která je rovna

$$h(z_1, z_2) = \begin{cases} f(g^{-1}(z_1, z_2)) \cdot |J_{g^{-1}}(z_1, z_2)| & \text{pro } (z_1, z_2) \in g(S), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $J_{g^{-1}}$ je Jakobián funkce g^{-1}.

Výše uvedenou větu o transformaci využíváme i v situacích, kdy potřebujeme spočítat rozdělení náhodné veličiny $W = t(X,Y)$, kde $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. V takovém případě nejprve spočítáme sdružené rozdělení například vektoru $(W,X)'$ pomocí věty o transformaci a pak ze získáne hustoty spočteme marginální rozdělení W.