Limitní věty I.

12.4. a 16.4. 2018

1. Nekonečně krát hodíme symetrickou šestistěnnou kostkou. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) padne šestka v nekonečně mnoha hodech,
   (b) padne šestka ve všech až na konečně mnoho hodů,
   (c) padne nekonečně krát 100 šestek za sebou.

2. Nechť $X_1, X_2 \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_i \geq \ln i^2]$,
   (b) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_1 \geq \ln i^2]$,
   (c) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_i \geq \ln i]$,
   (d) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_1 \geq \ln i]$.

3. Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro které $\mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^{\alpha}$ a $\mathsf{P}(X_n = 1) = 1/n^{\alpha}$, kde $\alpha > 0$.
   (a) Zjistěte, zda X_n konverguje k 0 v pravděpodobnosti.
   (b) Zjistěte, pro která α konverguje X_n k 0 skoro jistě.

4. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných pokusů, z nichž každý skončí úspěchem s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ a neúspěchem s pravděpodobností $1 - p$.
   (a) Dokažte, že relativní četnosti úspěchů v n pokusech ν_n konvergují k p s.j. pro $n \to \infty$.
   (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti určete, kolik musíme provést pokusů, aby s pravděpodobností alespoň 95 % nebyla odchylka ν_n od p větší než 0.01.

5. Uvažujme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ s konečným rozptylem. Definujme veličiny $Y_k = k^{1/3} X_k$, $k = 1, 2, \dots$. Platí pro posloupnost $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ silný zákon velkých čísel?

6. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových, že
   $$\mathrm{P}(X_k = k^{\lambda}) = \mathrm{P}(X_k = -k^{\lambda}) = \frac{1}{2},$$
   kde $\lambda < \frac{1}{2}$ je nějaká konstanta. Platí pro posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ silný zákon velkých čísel?

7. Nechť X_n jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Ukažte, že
   (a) je-li $\mathsf{E}|X_1| = \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nekonečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.
   (b) je-li $\mathsf{E}|X_1| < \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nejvýše konečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.

8. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor takový, že $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}[0, 1]$ a P je Lebesgueova míra na $[0, 1]$. Definujme jevy A_n jako $A_n = [0, 1/n]$. Určete $\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

Definice. Nechť $A_1, A_2, \ldots$ je posloupnost náhodných jevů. Označme

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Jev $\limsup_{n\to\infty} A_n$ znamená, že nastalo nekonečně mnoho jevů A_n, jev $\liminf_{n\to\infty} A_n$ znamená, že nastanou všechny A_n až na konečně mnoho.

Příklad: Nechť $\Omega = \{0,1\}$ a uvažujme posloupnost jevů $\{0\}, \{1\}, \{0\}, \{1\}, \{0\}, \{1\}, \ldots$, pak jejich $\limsup$ je $\{0,1\}$ a jejich $\liminf$ je $\emptyset$.

Borel-Cantelliho 0-1 zákony:

- (Cantelli) Je-li $\{A_n\}$ posloupnost jevů takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$, pak
$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$
- (Borel) Nechť je $\{A_n\}$ posloupnost **nezávislých** jevů. Pak
$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty,$$
$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty.$$

Konvergence náhodných veličin Nechť $X_1, X_2, \ldots$ a X jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Řekneme, že X_n konverguje k X skoro jistě pro $n \to \infty$, značíme $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} X$, jestliže

$$\mathsf{P}(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

Řekneme, že X_n konverguje k X v pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, značíme $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

Silný zákon velkých čísel:

- **(SZVČ pro nestejně rozdělené veličiny)** Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých veličin takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{Var} X_n}{n^2} < \infty$. Pak $(\overline{X}_n - \mathsf{E}\overline{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0$.
- **(SZVČ pro stejně rozdělené veličiny)** Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin. Pak
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \mu \text{ pro nějaké } \mu \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{E}|X_1| < \infty.$$
V takovém případě $\mu = \mathsf{E}X_1$.

Čebyševova nerovnost: Je-li $X \in L_2$, pak

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| > \varepsilon) < \frac{\operatorname{Var} X}{\varepsilon^2} \qquad \text{pro všechna } \varepsilon > 0.$$