Náhodné veličiny a náhodné vektory
14.11.2017

1. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
   (a) Spočítejte kovarianci X a Y.
   (b) Spočtěte korelaci X a Y.

2. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu
$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$
   (a) Spočtěte kovarianci $\mathsf{Cov}\,(X, Y)$.
   (b) Napište varianční matici vektoru $(X, Y)'$.
   (c) Spočtěte korelaci X a Y.

3. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?

4. Klíčovým rozdělením v pravděpodobnosti a statistice je tzv. normální rozdělení. Normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ má hustotu
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
   kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry tohoto rozdělení.
   (a) Načrtněte graf hustoty $f(x)$.
   (b) Uvažujte nejprve tzv. standardizované normální rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$ a spočtěte jeho střední hodnotu a rozptyl.
   (c) Spočtěte střední hodnotu obecného $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ rozdělení.
   (d) Spočtěte rozptyl $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

5. Test obsahuje n otázek, přičemž na každou otázkou jsou k dispozici 4 odpovědi, z nichž je vždy právě jedna správná. Student odpovědi kroužkuje náhodně a náhodná veličina X udává počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Proveďte výpočet $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{Var}\,X$ pomocí zápisu $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, kde Y_i jsou nezávislé veličiny s alternativním rozdělením.
   (b) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl X přímo z jeho rozdělení nebo pomocí momentové vytvořující funkce.

6. Předpokládejme, že počet vadných pixelů na obrazovce se řídí Poissonovým rozdělním s parametrem $\lambda = 0.4$.
   (a) Spočtěte očekávaný počet vadných pixelů na obrazovce.
   (b) Spočtěte rozptyl počtu vadných pixelů.

Opakování

Kovariance a korelace: Kovariance $\mathsf{Cov}\,(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je definována jako

$$\mathsf{Cov}\,(X,Y) = \mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)(Y-\mathsf{E}Y) = \mathsf{E}(XY) - (\mathsf{E}X)(\mathsf{E}Y),$$

je-li $\mathsf{E}X^2 < \infty$, $\mathsf{E}Y^2 < \infty$.
Korelace $\mathsf{Corr}\,(X,Y)$ je definována jako

$$\mathsf{Corr}\,(X,Y) = \frac{\mathsf{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X}\sqrt{\mathsf{Var}\,Y}},$$

je-li $\mathsf{Var}\,X, \mathsf{Var}\,Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \mathsf{Corr}\,(X,Y) \leq 1$. Korelce je mírou lineární závislosti mezi X a Y.

Varianční matici náhodného vektoru $(X,Y)'$ značíme jako $\mathsf{Var}\,(X,Y)'$ a je tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathsf{Var}\,X & \mathsf{Cov}\,(X,Y) \\ \mathsf{Cov}\,(X,Y) & \mathsf{Var}\,Y \end{pmatrix}.$$

Další užitečné vlastnosti: Jestliže $X_1,\dots,X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E}X_i$
- $\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\,X + \sum\sum_{i\neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i,X_j)$