

# NÁHODNÉ VELIČINY: MOMENTOVÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE, MINIMUM, MAXIMUM A JINÉ

21.11.2017

---

1. Předpokládejme, že počet vadných pixelů na obrazovce se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem  $\lambda > 0$ .
  - (a) Určete momentovou vytvořující funkci tohoto rozdělení.
  - (b) Pomocí (a) spočtete očekávaný počet a rozptyl vadných pixelů na obrazovce.
2. Doba čekání na vlak je náhodná veličina  $X$  s exponenciálním rozdělením s hustotou  $f(x) = a \cdot e^{-ax}$  pro  $x \geq 0$  a  $f(x) = 0$  pro  $x < 0$ , pro nějaké  $a > 0$ .
  - (a) Určete momentovou vytvořující funkci tohoto rozdělení.
  - (b) Pomocí (a) spočtete střední hodnotu a rozptyl  $X$ .
  - (c) Na vlak čekáte již 2 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že budete čekat více než 5 min?
  - (d) Na vlak čekáte  $n$  dní po sobě a doby čekání v jednotlivé dny jsou na sobě nezávislé. Označme jako  $Z_n$  maximální dobu čekání po těchto  $n$  dní. Určete rozdělení (hustotu)  $Z_n$ .
  - (e) Podobně označme  $Y_n$  minimální dobu čekání po  $n$  dní. Určete rozdělení  $Y_n$ .
  - (f) Spočítejte střední hodnotu  $Y_n$ . Zkoumejte chování pro rostoucí  $n$ .
  - (g) Spočítejte distribuční funkci  $F$  veličiny  $X$  a určete rozdělení náhodné veličiny  $U = F(X)$ .
  - (h) Navrhněte, jak nasimulovat výše uvedené doby čekání, umíme-li generovat náhodné číslo z intervalu  $[0, 1]$ .
3. Předpokládejme, že výše pojistného plnění  $X$  se řídí Paretovým rozdělením s hustotou  $f(x) = \frac{p}{x^{p+1}}$  pro  $x \geq 1$  a  $f(x) = 0$  jinak.
  - (a) Spočítejte očekávanou hodnotu  $X$ .
  - (b) Navrhněte, jak generovat veličiny z tohoto rozdělení, umíme-li generovat náhodné číslo z intervalu  $[0, 1]$ .
4. V košíku je  $N$  čokoládových bonbónů, které vypadají na pohled všechny stejně, ale  $a$  bonbónů má uvnitř nedobrou mentolovou náplň a  $N - a$  bonbónů má dobrou oříškovou náplň. Z košíku vybereme náhodně  $n$  bonbónů. Náhodná veličina  $X$  udává počet vytažených bonbónů s mentolovou náplní.
  - (a) Připomeňte si rozdělení  $X$ .
  - (b) Spočtete střední hodnotu  $X$ .
  - (c) Spočtete rozptyl  $X$ .

*Nápověda pro (b) a (c): Napište si  $X$  jako součet 0-1 náhodných veličin. V (c) ale pozor: tyto veličiny nejsou nezávislé a je potřeba spočítat jejich kovarianci.*

## OPAKOVÁNÍ

MOMENTOVÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE veličiny  $X$  je funkce reálné proměnné  $t \in \mathbb{R}$  definovaná jako  $\psi(t) = \mathbb{E}e^{tX}$  (existuje-li). Platí

$$\mathbb{E}X = \psi'(0), \quad \text{Var } X = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$

Jestliže  $X_1, \dots, X_n$  jsou náhodné veličiny a  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}X_i$
- $\text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var } X + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$