Rozdělení součtu a Centrální limitní věta

5.12.2018

1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr. Zajímá nás rozdělení $\sum_{i=1}^n X_i$.
   (a) Jaké je rozdělení $\sum_{i=1}^n X_i$, mají-li X_i alternativní rozdělení $\mathsf{Alt}(p)$, $p \in (0,1)$?
   (b) Uvažujme nezávislé hody pravidelnou kostkou a nechť X_i udává hodnotu, která padla v hodu i. Odvoďte rozdělení součtu $X_1 + X_2$. Podobně zapište rozdělení $X_1 + X_2 + X_3$.
   (c) Nechť X_i mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Indukcí ukažte, že $\sum_{i=1}^n X_i$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $n\lambda$.

2. Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech symetrickou mincí padne rub více než 60 krát? Vyjádřete tuto pravděpodobnost přesně i pomocí CLV.

3. Pořádáte vánoční večírek pro 100 hostů. Lze předpokládat, že počet chlebíčků, které sní náhodně vybraný host, je náhodná veličina se střední hodnotou 5 a rozptylem 1 a že jednotliví hosté konzumují nezávisle na sobě.
   (a) S jakou pravděpodobností sní hosté méně než 490 chlebíčků?
   (b) Kolik musíte objednat chlebíčků, aby jich byl nedostatek (hosté by měli ještě hlad) s pravděpodobností menší než 0.1?
   (c) Kolik hostů může přijít na oslavu, jestliže chcete mít jistotu, že objednaných 500 chlebíčků bude stačit s pravděpodobností větší než 95 %?

4. Pojišťovna má pojištěno 1 000 osob stejného věku. Pravděpodobnost úmrtí v daném roce je u každého pojištěného 0,01. Pojištěnci platí roční pojistné 1 200 Kč a v případě úmrtí je oprávněné osobě vyplaceno 80 000 Kč.
   (a) Jaký je v daném roce očekávaný zisk pojišťovny?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že pojišťovna utrpí v daném roce ztrátu?
   (c) Jak bychom měli změnit roční pojistné, aby byla pravděpodobnost ztráty menší než 1 %?

5. Životnost jedné žárovky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 10 hodin. Jakmile se jedna žárovka porouchá, nahradíme ji ihned další. Kolik máme zakoupit žárovek, abychom měli jistotu, že budeme moci svítit alespoň 600 hodin s pravděpodobností alespoň 95%?

Tabulka distribuční funkce a kvantilové funkce $\mathsf{N}(0,1)$

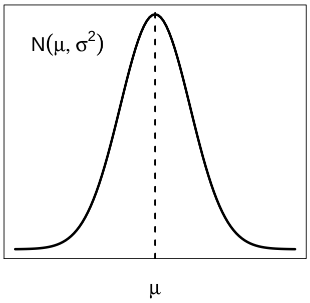
x	0.000	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900
$\Phi(x)$	0.500	0.540	0.579	0.618	0.655	0.691	0.726	0.758	0.788	0.816
x	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
$\Phi(x)$	0.540	0.579	0.618	0.655	0.691	0.726	0.758	0.788	0.816	0.841
x	1.100	1.200	1.300	1.400	1.500	1.600	1.700	1.800	1.900	2.000
$\Phi(x)$	0.864	0.885	0.903	0.919	0.933	0.945	0.955	0.964	0.971	0.977
x	2.100	2.200	2.300	2.400	2.500	2.600	2.700	2.800	2.900	3.000
$\Phi(x)$	0.982	0.986	0.989	0.992	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998	0.999

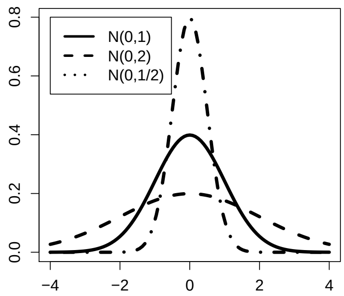
α	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(\alpha) = q_\alpha$	0	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Normální rozdělení. Normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá **normované** normální rozdělení a značí se $\mathsf{N}(0,1)$.





- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $\mathsf{E}X = \mu$ a $\mathsf{Var}\, X = \sigma^2$. Dále pak $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0,1)$.
- **Distribuční funkce** rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$ se značí jako Φ, tj. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$. Tento určitý integrál je možné spočítat jen **numericky**, a proto hodnoty funkce Φ nalezneme **v tabulkách** (nebo získáme pomocí vhodného softwaru).
- Ze symetrie platí
$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$
- Hodnoty $\Phi^{-1}(\alpha) = q_\alpha$ (tzv. kvantily $\mathsf{N}(0,1)$) jsou také uvedeny v tabulkách a platí $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$.
- Normální rozdělení má v pravděpodobnosti zcela zásadní význam, jak ilustruje následující **centrální limitní věta**.

Centrální limitní věta (CLV): Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s $0 < \mathsf{Var}\, X_1 < \infty$. Pak

$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\,\mathsf{Var}\, X_1}} \le x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

neboli ekvivalentně

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{Var}\, X_1}} \le x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde Φ je distribuční funkci normálního rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$.
Zkráceně píšeme

$$Z_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\mathsf{Var}\, X_1}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{Var}\, X_1}} \overset{asympt.}{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

a říkáme, že Z_n má asymptoticky normální rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$.

CLV nám tedy říká, že distribuční funkce F_n veličiny Z_n se při $n \to \infty$ blíží k Φ. Pro n dost velké tedy lze uvažovat

$$\mathsf{P}\left(Z_n \le x\right) \doteq \Phi(x).$$