

## VÝSLEDKY PŘÍKLADŮ NA PROCVIČENÍ

POSLEDNÍ ÚPRAVA: 18. LISTOPADU 2012

- 
1. kostky: (a)  $1/16$  (b)  $1/2$
  2. firma:  $371/462$
  3. alespoň jedna šestka a)  $11/36$ , b)  $1 - (5/6)^n$
  4. vlak  $\sum_{k=0}^9 \binom{10}{k} \left(\frac{10-k}{10}\right)^{16} (-1)^k$
  5. klíče: (a)  $1/n$  (b)  $(1 - 1/n)^{k-1} \cdot 1/n$
  6. úsečka  $1/4$
  7. jevy jsou závislé
  8. (a) neplatí,  $A^C$  a  $B^C$  jsou nezávislé,  
(b) platí  
(c) neplatí  
(d) platí  
(e) neplatí
  9.  $1 - 0.9^3$
  10. dostihy:  $0.6$
  11. profesor:  $\frac{3^3}{4^4 - 3^4} = \frac{27}{175}$
  12. studenti: (a)  $28/45$  (b) ze skupiny B (c)  $1 - (0.2)^3(0.4)^4(0.6)^2$
  13. krabice s míčky:  $528/5915 = 0.089$
  14. HUMOR:  $5/11$
  15. mince:  $\frac{1}{(e-1)(k+1)!}$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots$
  16. bílá kulička  $5/12$
  17. obrazy: (a)  $0.977$  (b)  $0.64$
  18. 5 nebo 7:  $2/5$
  19. HIV test: (a)  $0.77$ , (b)  $10^{-5}$ , (c)  $0.999$
  20. kostky: (a)  $P(\text{"6"}) = 7/72$ ,  $P(\text{"11"}) = 1/24$ ,  
(b)  $4/7$   
(c)  $P(\text{"6"}|\text{chlapec}) = 5/54$ ,  $P(\text{"6"}|\text{dívka}) = 19/180$ ,  $P(\text{"6"}) = 157/1620$

21.  $c = 1/14$ ,  $\mathbf{E}X = \frac{18}{7}$ ,  $\mathbf{Var} X = \frac{19}{49}$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ \frac{1}{14} & x \in [1, 2), \\ \frac{5}{14} & x \in [2, 3), \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(X \geq 2) = \frac{13}{14}.$$

Rozdělení  $Y$ :  $\mathbf{P}(Y = 0) = 4/14 = 2/7$  a  $\mathbf{P}(Y = 1) = 1/14 + 9/14 = 10/14 = 5/7$ , tj.  $Y$  má alternativní rozdělení  $A(p)$  s parametrem  $p = 5/7$ ;  $\mathbf{E}Y = \frac{5}{7}$

22.  $a = 1/4$ ,  $\mathbf{E}X = 5/12$ ,  $\mathbf{Var} X = 155/144$ , rozdělení  $Y$ :  $\mathbf{P}(Y = 0) = 1/2$ ,  $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = 4) = 1/4$ ,  $\mathbf{E}Y = 5/4$

23. basketbalista:  $\mathbf{P}(X = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n$  pro  $n = 0, 1, 2, \dots$

24.(a)

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{pro } \max\{0, K - N + n\} \leq k \leq \min\{K, n\}$$

(b)  $\mathbf{E}X = n \frac{K}{N}$

(c)  $\mathbf{Var} X = n \frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$

25.  $c = 1/(e-1)$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{e^x - 1}{e - 1}, & x \in [0, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{e-1}, \quad \mathbf{Var} X = \frac{e^2 - 3e + 1}{(e-1)^2}$$

26. krychle  $\mathbf{E}V = a^3/4$ ,  $\mathbf{Var} V = 9/112 \cdot a^6$

27. (a)  $Y$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0, 1]$ ,

(b)  $\mathbf{E}Z = 3/2$ ,  $\mathbf{Var} Z = 3/4$

28. (a) distr. funkce  $Y$ :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \sqrt{y}/\pi, & y \in [0, \pi^2], \\ 1 & y > \pi^2 \end{cases}$$

hustota:  $g(y) = 1/[2\pi\sqrt{y}]I[y \in [0, \pi^2]]$ ,  $\mathbf{E}Y = \pi^2/3$

(b)  $\mathbf{E}Z = 2/\pi$

29. (a)  $c = 1/2$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

- (b)  $EX = \pi/2 =$  medián  $X$  (plyne ihned ze symetrie hustoty)
- (c)  $F^{-1}(u) = \arccos(1 - 2u)$ ,  $u \in (0, 1)$

30. trojúhelník:

- (a) 0
- (b) rozdělení je rovnoměrné na intervalu  $(0, \pi/2)$ ; hledaná pravděpodobnost je  $1/3$
- (c) distribuční funkce a hustota:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y, & y \in (0, 1), \\ 1, & y \geq 1, \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$P(a > 1/2) = 2/3$$

(d)  $Ea = \frac{2}{\pi}$ ,  $\text{Var } a = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$ ,

(e)  $ES = \frac{1}{2\pi}$ .

31. hody mincí

- (a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
X	0	0	1/8	1/8
	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

- (b) marginální rozdělení:  $P(X = 0) = 1/4$ ,  $P(X = 1) = 1/2$ ,  $P(X = 2) = 1/4$ , totéž pro  $Y$ , veličiny jsou závislé
- (c)  $\text{Cov}(X, Y) = -1/4$ ,  $\rho_{XY} = -1/2$

32.(a)  $c = 4$ ,

(b)  $f_X(x) = xe^{-x^2} I[x \geq 0]$ ,  $f_Y(y) = 2ye^{-y^2} I[y \geq 0]$ ,  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé

(c)  $E(X^2 + Y^2) = 2$

33.  $c = 1/\pi$ ,  $f_X(x) = 2/\pi \sqrt{1-x^2} I[x \in (-1, 1)] = f_Y(x)$ , veličiny jsou závislé

34.  $X + Y$  má binomické rozdělení  $\text{Bi}(m + n, p)$

35. maximum a minimum:

(a)  $F_U(u) = [F(u)]^n$ ,  $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1} f(u)$

(b)  $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$ ,  $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1} f(v)$

(c)  $EU = n/(n + 1)$ ,  $\text{Var } U = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$ ,  $EV = 1/(n + 1)$ ,  $\text{Var } V = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$

36.  $\text{Cov}(H, D) = 1/36$ , jsou závislé

37. bankomat: alespoň 10230

38. kostka: 0.921

39. hostina: nejvýše 45 hostů

40. konzultace: 0.013

41. terč: 0.993075