Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

29.10.2012

1. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
   (b) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé? Jsou jevy A,B,C nezávislé?

3. Házíme dvěma hracími kostkami najednou dokud nepadne součet 5 nebo součet 7 (na obou kostkách dohromady). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?

4. Mezi 100 krabicemi mandarinek ze Španělska je 5 krabic se shnilými, stejně jako mezi 200 krabicemi z Řecka. Nejdříve vybereme náhodně jednu ze zásilek a potom ze zásilky náhodně vybereme krabici. Určete s jakou pravděpodobností obsahuje vybraná krabice shnilé mandarinky.

5. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
   (b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

6. Z pošty doručené na server je 80 % spamů. Spamový filtr úspěšně rozpozná 90% všech spamů, ale zároveň 15 % korektní pošty je označeno jako spam.
   (a) Jaké je pravděpodobnost, že email smazaný filtrem jste si chtěli přečíst?
   (b) Jaké je procento spamů ve vaší schránce?

7. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance, který byl jednou střelou trefen. Určete pravděpodobnost toho, že kance zastřelil první, druhý nebo třetí střelec, jsou-li pravděpodobnosti zásahu po řadě rovny 0.2, 0.4 nebo 0.6.

Opakování

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \mathsf{P}(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:

Jestliže náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ splňují $\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak

$$\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathsf{P}(A_{n-1} | \cap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \cdots \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_1).$$