Bayesova věta – pokrač.

12.11.2012

1. Tři skupiny studentů řeší obtížný příklad. Ve skupině A jsou 3 velmi chytří studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.8. Ve skupině B jsou 4 průměrní studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.6. Ve skupině C jsou 2 slabí studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností pouze 0.4.
   (a) S jakou pravděpodobností náhodný student vyřeší příklad?
   (b) Náhodně vybraný student příklad nevyřešil. Ze které skupiny nejpravděpodobněji byl?
   (c) Studenti pracují nezávisle. S jakou pravděpodobností bude příklad vyřešen?

2. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4. Cestou z Karlína navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

3. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?

Náhodná veličina

4. V peněžence máte dvě papírové pětisetkoruny, jednu tisícikorunu a jednu dvoutisícikorunovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X, tj. jakých hodnot veličina X nabývá a s jakými pravděpodobnostmi.
   (b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X.
   (c) Zloděj následně zaplatí 1000 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení Y.
   (d) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit večeři za 210 Kč?

5. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek. Odvoďte rozdělení X.

Opakování

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta: Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností: Jestliže náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ splňují $\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak

$$\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathsf{P}(A_{n-1} | \cap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \dots \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_1).$$

Náhodná veličina: **Náhodná veličina** X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Jednotlivým prvkům $\omega \in \Omega$ tedy přiřazuje reálná čísla $X(\omega)$.

Rozdělení náhodné veličiny X

- popisuje pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ pro všechny množiny $B \in \mathcal{B}$,
- je jednoznačně určeno **distribuční funkcí**, která je funkcí reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ a je definovaná jako
$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x).$$

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \dots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.