

MNOHOROZMĚRNÉ NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

2.10.2018

DEFINICE: Necht' $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)'$, kde $Z_i \sim N(0, 1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Necht' $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}_{n \times r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ je matice. Pak řekneme, že $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$ má n -**rozměrné normální rozdělení** $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$.

VLASTNOSTI: Ukažte, že platí:

1. Má-li $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, pak $E\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}$, $\text{Var } \mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}$.
2. Diskuze k definici:
 - Je-li $\boldsymbol{\Sigma}_{n \times n}$ pozitivně semidefinitní matice s hodnotí $h(\boldsymbol{\Sigma}) = r \leq n$, pak existuje matice $\mathbf{A}_{n \times r}$ taková, že $h(\mathbf{A}) = r$ a $\mathbf{AA}^T = \boldsymbol{\Sigma}$.
 - Rozdělení $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$ z definice nezávisí na konkrétní volbě \mathbf{A} , závisí pouze na $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$.
3. Je-li $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^k$, pak $\mathbf{BX} + \boldsymbol{\mu}_2$ má rozdělení $N_k(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^T)$.
 Poznámka: Dokonce platí, že \mathbf{X} má mnohorozměrné normální rozdělení $\Leftrightarrow \mathbf{c}^T\mathbf{X}$ má normální rozdělení pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
4. Existence hustoty:
 - Je-li $\boldsymbol{\Sigma}$ regulární, pak existuje hustota vzhledem k Lebesgueově míře a je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$
 - Je-li $\boldsymbol{\Sigma}$ singulární, pak hustota vzhledem k Lebesgueově míře neexistuje.
5. Necht' $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a označme $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$, kde \mathbf{X}_1 tvoří prvních k složek \mathbf{X} .
 - (i) Marginální rozdělení \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 je normální, speciálně $\mathbf{X}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^T$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$.
 - (ii) Je-li $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = 0$, pak jsou \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 nezávislé.
6. Necht' $X \sim N(0, 1)$ a necht' $1/2 = P(Z = 1) = P(Z = -1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Definujme $Y = Z \cdot X$. Ukažte, že
 - (a) X i Y mají rozdělení $N(0, 1)$,
 - (b) veličiny X a Y jsou nekorelované, ale závislé,
 - (c) sdružené rozdělení X a Y není normální.
7. Pro $n = 2$ ukažte, jak lze generovat náhodný vektor z rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ pro nějaké zadané $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ pozitivně semidefinitní, umíme-li generovat náhodné veličiny z $N(0, 1)$.

9. Necht' $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulární. Pak

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_n^2.$$

10. Nalezněte asymptotickou aproximaci rozdělení χ_n^2 pro velké n pomocí normálního rozdělení.

OPAKOVÁNÍ

SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD MATICE. Necht' $\boldsymbol{\Sigma}_{n \times n}$ je symetrická reálná matice. Pak existuje \mathbf{Q} ortogonální a $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonální matice takové, že

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T.$$

χ^2 ROZDĚLENÍ. Necht' Z_1, \dots, Z_n jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathbf{N}(0, 1)$. Pak $Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ má χ^2 rozdělení s n stupni volnosti.

VÝZNAM NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ: MNOHOROZMĚRNÁ CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA. Necht' $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad n \rightarrow \infty.$$