

KONVERGENCE POSLOUPNOSTI NÁHODNÝCH VELIČIN

10.10.2019

1. Nechť X_1, X_2, \dots jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$. Definujme $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ukažte, že pro $n \rightarrow \infty$ platí
 - (a) $Y_n \xrightarrow{D} 1$,
 - (b) $n(1 - Y_n) \xrightarrow{D} Y$, kde Y má Exponenciální rozdělení s parametrem 1,
 - (c) $Y_n \xrightarrow{P} 1$.
 - (d) Definujme dále $U_n = \bar{X}_n$. Vyšetřete konvergenci $\{U_n\}$ v pravděpodobnosti a v distribuci.
2. Nechť X_1, X_2, \dots jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
 - (a) Určete asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)$.
 - (b) Dokažte, že $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}}$ konverguje v distribuci k $N(0, 1)$.
3. Ukažte, že Studentovo t_n - rozdělení konverguje k $N(0, 1)$ pro $n \rightarrow \infty$.
4. Nechť X_n má rovnoměrné rozdělení na $[0, 1/n]$ a definujte $Y_n = X_n^2$.
 - (a) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{X_n\}$ pro $n \rightarrow \infty$.
 - (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{Y_n\}$ pro $n \rightarrow \infty$.
 - (c) Uvědomte si vztah (a) a (b).
5. Nechť $X_n \sim N(\mu, 1/n)$.
 - (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow{P} \mu$ pro $n \rightarrow \infty$.
 - (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\sqrt{n}(X_n - \mu)$.
 - (c) Uvědomte si vztah (b) a (a).
6. Uvažujte posloupnost hodů mincí a náhodné veličiny X_n , které jsou identifikátory toho, zda v n -tém hodu padl orel. Nechť $Y_n = 1 - X_n$ a $X = X_1$.
 - (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow{D} X$ a $Y_n \xrightarrow{D} X$, ale $\{X_n + Y_n\}$ nekonverguje v distribuci k $2X$.
 - (b) Ukažte, že $(X_n, Y_n)'$ nekonverguje v distribuci k $(X, X)'$ (tj. konvergence po složkách neimplikuje konvergenci vektorů).
7. Nechť X_1, X_2, \dots jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I[x \geq 0]$. Definujme $T_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$.
 - (a) Ukažte, že $T_n \xrightarrow{P} \lambda$ pro $n \rightarrow \infty$.
 - (b) Najděte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$.
 - (c) Najděte asymptotické rozdělení $\sqrt{n} \bar{X}_n (T_n - \lambda)$.
8. Cramérova-Woldova věta: $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ právě tehdy, když pro každé $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{t}'\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{t}'\mathbf{X}$. Pomocí předchozí věty a jednorozměrné CLV dokažte mnohorozměrnou verzi centrální limitní věty.

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je posloupnost k -rozměrných náhodných vektorů a \mathbf{X} je k -rozměrný náhodný vektor. Pak řekneme, že

- $\mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X}$, pokud pro $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}(\{\omega : \|\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)\| \rightarrow 0\}) = 1,$$

- $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\{\omega : \|\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)\| > \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

- $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$, pokud pro distribuční funkce platí

$$F_n(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{x}) \quad \text{ve všech bodech } \mathbf{x}, \text{ ve kterých je } F \text{ spojitá,}$$

kde F_n je distribuční funkce \mathbf{X}_n a F je distribuční funkce \mathbf{X} .

PLATÍ:

- konvergence náhodných vektorů implikuje konvergenci po složkách, opak platí jen pro konvergence s.j. a v \mathbb{P} ,
- platí $\mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ a žádná z implikací obecně opačně neplatí,
- jestliže $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{k} \equiv konst \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{k}$,
- spojitá transformace zachovává všechny uvedené konvergence,
- **Cramérova-Slutského věta (CS)** (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Z_n\}$ jsou posloupnosti náhodných veličin takových, že $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} c$ a $Z_n \xrightarrow{P} d$, kde X je náhodná veličina a $c, d \in \mathbb{R}$ jsou reálné konstanty. Pak

$$Y_n \cdot X_n + Z_n \xrightarrow{D} cX + d.$$

Pro $c \neq 0$ platí také

$$X_n/Y_n \xrightarrow{D} X/c.$$

- **Silný zákon velkých čísel (SZVČ)**: Nechť $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ je náhodný výběr z rozdělení s konečnou střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$. Pak $\bar{\mathbf{X}}_n \xrightarrow{s.j.} \boldsymbol{\mu}$ pro $n \rightarrow \infty$.
- **Centrální limitní věta (CLV)**: Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad n \rightarrow \infty.$$

- **Delta metoda** (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{T_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \sigma^2)$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ a nechť $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ , pak

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty.$$