

Zápočtová písemka z NMSA331

Varianta : vzorová

Příklad 1 (40 bodů) Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1}, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Uvažujte následující odhady parametru θ

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{-\sum_{i=1}^n \log(1-X_i)}, \quad \tilde{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (i) Je odhad $\hat{\theta}_n$ konzistentním odhadem parametru θ ?
- (ii) Je odhad $\tilde{\theta}_n$ konzistentním odhadem parametru θ ?
- (iii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_n$.
- (iv) Sestavte oboustranný intervalový odhad pro parametr θ o spolehlivosti $1 - \alpha$. Je tento odhad přesný nebo asymptotický?
- (v) Najděte transformaci stabilizující rozptyl odhadu $\hat{\theta}_n$ a pomocí této transformace sestavte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti $1 - \alpha$ pro parametr θ .

Příklad 2 (30 bodů) Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z binomického rozdělení s parametry 2 a $p \in (0, 1)$ (neznámý parametr), tj.

$$P(X_1 = i) = \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Uvažujte následující odhady parametru $\theta_X = p^2$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 2\}, \quad \tilde{\theta}_n = \frac{(\bar{X}_n)^2}{4}.$$

- (i) Je odhad $\hat{\theta}_n$ nestranným odhadem parametru θ_X ?
- (ii) Je odhad $\tilde{\theta}_n$ nestranným odhadem parametru θ_X ?
- (iii) Odvoďte asymptotická rozdělení odhadů $\hat{\theta}_n$ a $\tilde{\theta}_n$.
- (iv) Na základě výsledků z (iii), který z odhadů byste doporučil(a)?

Příklad 3 (30 bodů) Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(\theta, \theta + 1)$, tj. náhodná veličina X_1 má hustotu $f(x) = \mathbb{I}\{x \in (\theta, \theta + 1)\}$. Uvažujte následující odhad parametru θ

$$\hat{\theta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i - 1.$$

- (i) Je odhad $\hat{\theta}_n$ konzistentním odhadem parametru θ_X ?
- (ii) Je odhad $\hat{\theta}_n$ nestranným odhadem odhadem parametru θ_X ? Pokud ne, jak bychom ho měli upravit, aby byl nestranný?