

## NÁHODNÝ SOUČET NÁHODNÝCH VELIČIN

25.2.2019

1. Dokažte vlastnosti (i) a (ii).
2. V sáčku se semínky je  $N$  semínek, kde  $N$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda > 0$ . Každé ze semínek vyklíčí v rostlinku s pravděpodobností  $p \in (0, 1)$ . Nechť  $Z$  je počet vyklíčených rostlin.
  - (a) Nalezněte vytvořující funkci náhodné veličiny  $Z$ . Jaké má  $Z$  rozdělení?
  - (b) Ověřte na střední hodnotě a rozptylu  $Z$  platnost (ii).
3. Uvažujte předchozí příklad s tím, že  $N$  má nyní geometrické rozdělení s parametrem  $1 - \theta$ , kde  $\theta \in (0, 1)$ . Jaké má  $Z$  nyní rozdělení?
4. V daný den dorazí k bankomatu na okraji města  $N$  zákazníků, kde  $N$  má geometrické rozdělení s parametrem  $p$ . Každý zákazník si chce, nezávisle na ostatních zákaznících, vybrat náhodný počet  $X_i$  stokorun, kde  $X_i$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ .
  - (a) Spočítejte vytvořující funkci celkového počtu stokorun, který bude v daný den vybrán z bankomatu.
  - (b) Jaká je pravděpodobnost, že nebude z bankomatu vybráno nic? Jaká je pravděpodobnost, že bude vybrána právě jedna stokoruna?
  - (c) Určete střední hodnotu a rozptyl celkového počtu vybraných stokorun.
5. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení. Nechť  $X_0 = 1$  a označme  $\mathbb{E}U_{nj} = \mu < \infty$  a  $\text{Var} U_{nj} = \sigma^2 < \infty$ . Dokažte, že pak platí

$$\mathbb{E}X_n = \mu^n, \quad \text{Var} X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j.$$

6. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení s  $p_0 = P(U_{nj} = 0) = 1/5$ ,  $p_1 = P(U_{nj} = 1) = 1/5$  a  $p_2 = P(U_{nj} = 2) = 3/5$ .
  - (a) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v  $n$ -té generaci.
  - (b) Spočtete pravděpodobnost, že populace vymře do času  $n$  pro  $n = 1, 2$ .
  - (c) Určete pravděpodobnost, že populace časem vymře.
  - (d) Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé populaci.
7. Na stole leží tři mince. Hodíme všemi zároveň a do dalšího kola pokračujeme pouze s mincemi, na nichž padl líc. Pokud žádný líc nepadne, pak hra končí. Mohli bychom takto házet do nekonečna? Jaká je pravděpodobnost, že v  $n + 1$ -ní kole stále ještě máme čím házet?

## TEORIE

NÁHODNÝ SOUČET NÁHODNÝCH VELIČIN. Necht'  $\{X_k\}$  je posloupnost iid čítacích náhodných veličin<sup>1</sup> a  $N$  je čítací náhodná veličina s nimi nezávislá. Označme  $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$ .

(i)  $S_N$  je čítací náhodná veličina s vytvořující funkcí

$$P_{S_N}(s) = P_N(P_{X_1}(s)).$$

(ii) Pro první dva momenty platí

$$ES_N = ENEX_1, \quad \text{Var } S_N = EN\text{Var}(X_1) + \text{Var } N(EX_1)^2.$$

GALTONŮV-WATSONŮV PROCES VĚTVENÍ. Posloupnost náhodných veličin  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  udává počet jedinců v generacích  $n = 0, 1, \dots$ . Předpokládáme, že každý jedinec žije právě jednu generaci a v další generaci má náhodný počet potomků, přičemž počty potomků jednotlivých jedinců jsou na sobě nezávislé a stejně rozdělené a jsou nezávislé na předchozím průběhu procesu.

Předpokládejme, že v nulté generaci je  $X_0 = 1$  jedinec. Pak lze počet jedinců v  $n$ -té generaci vyjádřit jako

$$X_n = U_{n1} + U_{n2} + \dots + U_{nX_{n-1}} = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} U_{nj},$$

kde  $U_{n1}, U_{n2}, \dots$  jsou nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako  $X_1 = U_{11}$  a nezávislé na  $X_0, \dots, X_{n-1}$ . Zjevně tedy pro vytvořující funkce platí

$$\begin{aligned} P_{X_0} &= s, \\ P_{X_1} &= P_U(s), \\ P_{X_n}(s) &= P_{X_{n-1}}(P_U(s)), \quad |s| \leq 1, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

PRAVDĚPODOBNOST VYMŘENÍ Označme jako  $e_n = P(X_n = 0)$  pravděpodobnost, že populace vymře do času  $n$ . Pak  $\{e_n\}$  je neklesající posloupnost,  $e_n \leq 1$  a tedy existuje limita

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = P(\text{existuje } n : X_n = 0),$$

která vyjadřuje pravděpodobnost, že populace časem vymře. Je-li  $X_0 = 1$ , pak  $P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s))$  a pro  $s = 0$  dostaneme  $e_n = P_U(e_{n-1})$ . Limitním přechodem pak dostaneme rovnost  $e = P_U(e)$ .

PLATÍ: Necht'  $p_0 = P(U_{nj} = 0) \in (0, 1)$  a  $\mu = EU_{nj}$ .

(a) Je-li  $\mu \leq 1$ , pak  $e = 1$ .

(b) Je-li  $\mu > 1$ , pak  $0 < e < 1$  a  $e$  je jediné řešení rovnice  $P_U(s) = s$  na intervalu  $(0, 1)$ .

<sup>1</sup>Není-li výslovně řečeno jinak, uvažujeme všechny náhodné veličiny vlastní.