

NÁHODNÝ SOUČET NÁHODNÝCH VELIČIN

25.2. A 27.2.2020

1. Dokažte vlastnosti (i) a (ii).
2. V sáčku se semínky je N semínek, kde N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Každé ze semínek vyklíčí v rostlinku s pravděpodobností $p \in (0, 1)$, a to nezávisle na ostatních semínkách. Nechť Z je počet vyklíčených rostlin.
 - (a) Nalezněte vytvořující funkci náhodné veličiny Z . Jaké má Z rozdělení?
 - (b) Ověřte na střední hodnotě a rozptylu Z platnost (ii).
3. Uvažujte předchozí příklad s tím, že N má nyní geometrické rozdělení (viz minulá hodina) s parametrem $p \in (0, 1)$. Jaké má Z nyní rozdělení?
4. V daný den dorazí k bankomatu na okraji města N zákazníků, kde N je náhodná veličina, která má geometrické rozdělení s parametrem $p \in (0, 1)$. Každý zákazník si chce, nezávisle na ostatních zákaznících a nezávisle na počtu zákazníků, vybrat náhodný počet stokorun, kde tento počet má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
 - (a) Spočítejte vytvořující funkci celkového počtu stokorun, který bude v daný den vybrán z bankomatu.
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že nebude z bankomatu vybráno nic? Jaká je pravděpodobnost, že bude vybrána právě jedna stokoruna?
 - (c) Určete střední hodnotu a rozptyl celkového počtu vybraných stokorun.
5. Na stole leží tři mince. Hodíme všemi zároveň a do dalšího kola pokračujeme pouze s mincemi, na nichž padl líc. Pokud žádný líc nepadne, pak hra končí.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že po n -tém hodu stále ještě máme čím házet? Mohli bychom takto házet do nekonečna?
 - (b) Jak se situace změní, když za každý padlý líc přidáme do hry k mincí, kde $k \in \mathbb{N}$ je předem dané číslo?
6. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení. Nechť $X_0 = 1$ a označme $EU_{nj} = \mu < \infty$ a $\text{Var } U_{nj} = \sigma^2 < \infty$. Dokažte, že pak platí

$$EX_n = \mu^n, \quad \text{Var } X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j.$$

7. Aplikujte vzorce z příkladu 6 na příklad s házením mincemi z 5 (b), když budeme uvažovat pouze jednu startovní minci.
8. Spočítejte pravděpodobnost vymření pro příklad 5 (b).
9. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení s $P(U_{nj} = 0) = 1/5$, $P(U_{nj} = 1) = 1/5$ a $P(U_{nj} = 2) = 3/5$.
 - (a) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n -té generaci.
 - (b) Spočítejte pravděpodobnost, že populace vymře do času n pro $n = 1, 2$.
 - (c) Určete pravděpodobnost, že populace časem vymře.
 - (d) Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé generaci.

TEORIE

NÁHODNÝ SOUČET NÁHODNÝCH VELIČIN. Necht' $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených čítacích náhodných veličin¹ a N je čítací náhodná veličina s nimi nezávislá. Označme²

$$S_N := \sum_{k=1}^N X_k.$$

Potom:

(i) S_N je čítací náhodná veličina s vytvořující funkcí

$$P_{S_N}(s) = P_N(P_{X_1}(s)).$$

(ii) Pro první dva momenty platí

$$ES_N = ENEX_1, \quad \text{Var } S_N = EN\text{Var}(X_1) + \text{Var } N(EX_1)^2.$$

GALTONŮV-WATSONŮV PROCES VĚTVENÍ. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ udává počet jedinců populace identických organismů v generacích $n = 0, 1, \dots$. Předpokládáme, že každý jedinec žije právě jednu generaci a při svém zániku dá vzniknout náhodnému počtu potomků, přičemž počty potomků jednotlivých jedinců jsou na sobě nezávislé a stejně rozdělené a jsou nezávislé i na předchozím průběhu procesu.

Předpokládejme, že v nulté generaci je právě jeden jedinec, tj. $X_0 = 1$. Pak lze počet jedinců v n -té generaci X_n vyjádřit jako

$$X_n = U_{n1} + U_{n2} + \dots + U_{nX_{n-1}} = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} U_{nj},$$

kde U_{n1}, U_{n2}, \dots jsou nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako $X_1 = U_{11}$ a nezávislé na X_0, X_1, \dots, X_{n-1} . Zjevně tedy pro vytvořující funkce platí

$$\begin{aligned} P_{X_0}(s) &= s, \\ P_{X_1}(s) &= P_U(s), \\ P_{X_n}(s) &= P_{X_{n-1}}(P_U(s)), \quad |s| \leq 1, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

PRAVDĚPODOBNOST VYMŘENÍ Označme jako $e_n = P(X_n = 0)$ pravděpodobnost, že populace vymře do času n . Pak $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesající ($[X_n = 0] \subseteq [X_{n+1} = 0]$), omezená ($0 \leq e_n \leq 1$) posloupnost a tedy existuje limita

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = P(\text{existuje } n : X_n = 0),$$

která vyjadřuje pravděpodobnost, že populace časem vymře. Je-li $X_0 = 1$, pak

$$P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s)), \quad |s| \leq 1$$

a volbou $s = 0$ dostaneme $e_n = P_U(e_{n-1})$. Limitním přechodem pak dostaneme rovnost $e = P_U(e)$.

PLATÍ: Necht' $p_0 = P(U_{nj} = 0) \in (0, 1)$ a $\mu = EU_{nj}$.

(a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $e = 1$.

(b) Je-li $\mu > 1$, pak $0 < e < 1$ a e je jediné řešení rovnice $P_U(s) = s$ na intervalu $(0, 1)$.

¹Není-li výslovně řečeno jinak, uvažujeme všechny náhodné veličiny vlastní.

²S konvencí $\sum_{k=1}^0 X_k := 0$.