

SOUČTY A FUNKCE NÁHODNÝCH VELIČIN

13.11.2019

-
1. Uvažujme posloupnost n znaků, ve které se každý znak zkreslí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$, a to nezávisle na ostatních znacích. Nechť X značí počet takto zkreslených znaků. Dále označme jako Y_i identifikátor toho, zda se i -tý znak zkreslí.
 - (a) Připomeňte si, jaké rozdělení má X a jakou má střední hodnotu a rozptyl.
 - (b) Vyjádřete X pomocí veličin Y_1, \dots, Y_n a pomocí tohoto vyjádření spočtete EX a $\text{Var } X$.
 2. V rybníce plave 100 rybiček, z nichž je a zlatých. Náhodně vylovíme 5 rybiček a náhodná veličina X udává, kolik zlatých rybiček jsme vylovili.
 - (a) Vyjádřete analogicky jako v 1. veličinu X jako součet 0-1 náhodných veličin Y_i . Určete rozdělení Y_i .
 - (b) Spočtete očekávanou hodnotu X .
 - (c) Jsou veličiny Y_1, \dots, Y_n nezávislé? Pokud nejsou, spočtete jejich kovarianci a korelaci.
 - (d) Spočtete rozptyl X .
 3. Hmotnosti jednotlivých zásilek na poště jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Rozhodli jsme se změřit hmotnosti n zásilek a jsou to náhodné veličiny X_1, \dots, X_n .
 - (a) Označme jako $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ průměrnou hmotnost zásilky. Spočtete střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny. Jak se bude rozptyl měnit, budeme-li zvyšovat n ?

Předpokládejme dále, že X_i mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a, b]$, kde $0 < a < b$ jsou reálná čísla. Označme jako $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$ maximální hmotnost a $L_n = \min_{i=1, \dots, n} X_i$ minimální hmotnost.
 - (b) Vyjádřete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny M_n .
 - (c) Spočtete očekávanou hodnotu M_n . Jak se bude tato hodnota chovat, budeme-li navyšovat počet pozorování n ?
 - (d) Spočtete dále rozptyl M_n .
 - (e) Vyjádřete rozdělení a spočtete očekávanou hodnotu L_n .
 4. Proveďte výpočet z předchozího příkladu pro veličiny X_i s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = e^{-x}I(x \geq 0)$.

OPAKOVÁNÍ

Jsou-li X_1, \dots, X_n jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E X_i$
- $\text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var} X_i + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$