

## KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

1.10.2012 A 8.10.2012

- 
1. Připomeňte si základní kombinatorické pojmy jako permutace, variace, kombinace (vše bez opakování i s opakováním).
  2. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
    - (a) padnou čtyři různá čísla,
    - (b) padnou pouze lichá čísla,
    - (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
    - (d) součet čísel bude větší než 5,
    - (e) padne alespoň jedna šestka,
  3. V regálu je 6 lahví normálního rumu a 4 lahví pančovaného rumu (vizuálně k nerozeznání). Náhodně vybereme z regálu 3 lahve a z každé ochutnáme. Určete, s jakou pravděpodobností
    - (a) byl právě ve dvou námi ochutnaných lahvích metanol,
    - (b) byl alespoň v jedné námi ochutnané lahvi metanol.
  4. Na svazku máme 8 různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Vyzkoušený klíč vždy dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme až na pátý pokus?
  5. Uvažujme  $n$  různých dopisů a  $n$  různých obálek (s již nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
    - (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
    - (b ★) Spočítejte limitu této pravděpodobnosti pro  $n \rightarrow \infty$ .
  6. Do vlaku s  $n$  vagóny nastupuje  $r$  cestujících. Předpokládejme, že každý člověk si vybírá vagón zcela náhodně.
    - (a) Určete, s jakou pravděpodobností bude v prvním vagóně právě  $k$  cestujících.
    - (b) Jaká je pravděpodobnost, že žádný vagón nebude prázdný?
    - (c ★) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro  $n \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow \infty$  tak, že  $r/n \rightarrow \lambda > 0$ .
  7. Babička rozděljuje  $r$  tisícikorun do  $n$  obálek pro svých  $n$  vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).
    - (a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Karel dostane právě  $k$  tisícikorun.
    - (b) Jaká je pravděpodobnost, že každé z vnoučat dostane alespoň nějaké peníze?
    - (c ★) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro  $n \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow \infty$  tak, že  $r/n \rightarrow \lambda > 0$ .

## OPAKOVÁNÍ

## KLASICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOСТИ:

- $\Omega$  je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$  elementární jev
- $A \subset \Omega$  náhodný jev
- Necht'  $\Omega$  obsahuje **konečný** počet prvků, tj.  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , a necht' všechny elementární jevy  $\omega_i$  jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu  $A$  definujeme jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$

kde  $|A|$  = počet prvků množiny  $A$ .

## VLASTNOSTI:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,
- jestliže  $A \subset B$ , pak  $P(A) \leq P(B)$  a  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,
- $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,
- (princip inkluze a exkluze)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$