1) $\lim a_n$, kde $a_n = \dfrac{(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt[n]{n^3} - 1}$

Je $a_{12k} = \frac{1+\sin(3k\pi)-\cos(4k\pi)}{\sqrt[12k]{(12k)^3}-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{12k} = 0$. Na druhou stranu,

$$a_{24k+6} = \frac{1 + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 6k\pi\right) - \cos(2\pi + 8k\pi)}{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3} - 1} = \frac{-1}{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3} - 1}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{24k+6} = -\infty$. Zde jsme využili faktu, že posloupnost $\left\{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{(\sqrt[n]{n})^3\}_{n=1}^{\infty}$, a tedy má stejnou limitu, a dále tvrzení „jedna lomeno kladná nula“ a aritmetiku limit. Tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti $\lim a_n$ neexistuje.

2) $\lim a_n$, kde $a_n = \dfrac{3^n - [\sqrt[3]{(n+1)!}]}{3n^3 - [\sqrt[3]{n!}]}$

Platí $a_n = \frac{[\sqrt[3]{(n+1)!}]-3^n}{[\sqrt[3]{n!}]-3n^3}$. Zde je již čitatel i jmenovatel pro velká n kladný (to plyne z růstové škály), takže nebudeme mít potíže při násobení nerovností. Dále je $[\sqrt[3]{(n+1)!}] - 3^n \geq \sqrt[3]{(n+1)!} - 1 - 3^n$ a $[\sqrt[3]{n!}] - 3n^3 \leq \sqrt[3]{n!}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud

$$a_n \geq \frac{\sqrt[3]{(n+1)!} - 1 - 3^n}{\sqrt[3]{n!}} = \sqrt[3]{n+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{n!}} - \sqrt[3]{\frac{27^n}{n!}}$$

pro dostatečně velká n. Podle růstové škály, tvrzení o limitě třetí odmocniny a aritmetiky limit má výraz vpravo limitu $+\infty$. Z věty o jednom policajtovi pak plyne $\lim a_n = +\infty$.

3) $\lim a_n$, kde $a_n = \sqrt[n]{[n^4 \cos n] - n^2 3^n + 4^n}$

Vytkneme-li dominantní člen 4^n, obdržíme $a_n = 4 \cdot \sqrt[n]{\frac{[n^4 \cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1}$. Platí $\lim \frac{n^2 3^n}{4^n} = \lim \frac{n^2}{(\frac{4}{3})^n} = 0$ podle růstové škály. Dále

$$\frac{-n^4 - 1}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n - 1}{4^n} \leq \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n}{4^n} \leq \frac{n^4}{4^n},$$

a tedy $\lim \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} = 0$ dle růstové škály, aritmetiky limit a věty o dvou policajtech. Další použití aritmetiky limit nám pak dává $\lim\left(\frac{[n^4 \cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1\right) = 1$. Podle definice limity tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{1}{2} < \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1 < 2$. Odtud $4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < a_n < 4 \cdot \sqrt[n]{2}$ pro $n \geq n_0$. S pomocí známých limit a věty o dvou policajtech tedy odvodíme, že $\lim a_n = 4$.

4)

$$\begin{aligned}
\lim \frac{5 + \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}} &= \lim \frac{5 + \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)} = \\
&= \lim \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \cdot \left(\lim \frac{5}{\sqrt{n}} + \lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}}\right) = 1 \cdot \left(0 + \lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= \lim \frac{(n^3+n^2)^2 - (n^2+n)^3}{\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^{5} \sqrt[6]{(n^3+n^2)^{2(5-i)}(n^2+n)^{3i}}\right)} = \lim \frac{-n^5 - 2n^4 - n^3}{n^5\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^{5} \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2(5-i)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3i}}\right)} = \\
&= \lim \frac{-1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^{5} \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10+i}}\right)} = \frac{-1-0-0}{+\infty \cdot 6} = 0.
\end{aligned}$$

Po vytknutí dominantního členu $\sqrt{n}$ ze jmenovatele jsme využili aritmetiku limit. Následně jsme zlomek rozšířili tak, abychom mohli použít vzorec pro $a^6 - b^6$. Posléze jsme vykrátili dominantní člen v čitateli (n^5) a na závěr jsme použili aritmetiku limit a tvrzení o limitě 6-té odmocniny.

5) $\lim a_n$, kde $a_n = \left(\dfrac{2\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} - \cos\dfrac{n\pi}{4}\right)\dfrac{2n}{1 - \sqrt[n]{2n}}$

Platí $\lim \sqrt[n]{2n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$ podle aritmetiky limit. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{2n} > 1$, a tedy $\lim \frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}} = -\infty$ podle tvrzení „jedna lomeno záporná nula“. Nyní se věnujme výrazu v závorkách. Vytknutím dominantního členu, aplikací aritmetiky limit a tvrzení o limitě odmocniny obdržíme $\lim \frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim \frac{2-\frac{1}{n^{1/6}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2$. Podle definice limity tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} > \frac{3}{2}$. Protože $\cos x \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro $n \geq n_0$ platí $\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} - \cos\frac{n\pi}{4} > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Vynásobíme-li předchozí nerovnost záporným výrazem $\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$, dostaneme $a_n < \frac{1}{2}\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$ pro $n \geq n_0$. Odtud podle věty o jednom policajtovi plyne $\lim a_n = -\infty$.

6)

$$\lim \frac{\sqrt[6]{n^5+1} - \sqrt[5]{n^4-n^3} + \sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{\sqrt[6]{n^5+1}}{n^{\frac{5}{6}}} - \frac{\sqrt[5]{n^4-n^3}}{n^{\frac{5}{6}}} + \frac{\sqrt[n]{n^2}}{n^{\frac{5}{6}}}\right)}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{6}}\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{n^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} + \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^{\frac{5}{6}}}\right)}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} =$$

$$= \lim n^{\frac{1}{3}} \cdot \lim \frac{\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{n^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} + \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^{\frac{5}{6}}}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = +\infty \cdot \frac{1+0+0}{1} = +\infty.$$

Po vytknutí dominantních členů jsme využili aritmetiku limit a pro výpočet limity posledního zlomku znovu aritmetiku limit, tvrzení o limitě k-té odmocniny pro $k = 2, 5, 6$, a fakt, že $\sqrt[n]{n} \to 1$.

7) $\lim\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{1}{e} \cdot e$ dle aritmetiky limit.