1. TAYLORŮV POLYNOM

1. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě a pro následující funkce:
a) arctg, $k = 3, a = 1$
b) tg, $k = 3, a = \frac{\pi}{4}$
c) exp, $k = 5, a = 2$

2. Vypočtěte:
a) $\cos(0{,}1)$ s chybou menší než 10^{-4}.
b) $\log(1{,}1)$ s chybou menší než 10^{-4}.
c) $\sqrt{e}$ s chybou menší než 10^{-2}.

3. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě 0 (pokud není řečeno jinak) pro následující funkce:
a) $\sin \cdot \cos$, $k = 4$
b) tg, $k = 5$
c) e^{x^2}, $k = 6$
d) $\cos(x^3 - 1)$, $k = 3$, v bodě 1
e) $x^7 \sin(x^2)$, $k = 10$
f) $\cos(\sin x)$, $k = 5$
g) $\sin(\sin x)$, $k = 6$
h) $\sin(1 - \cos x)$, $k = 4$
i) $\log(\cos x)$, $k = 6$

4. Spočtěte limity:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5},$$

$$\text{e) } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right), \quad \text{f) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right), \quad \text{g) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x},$$

$$\text{h) } \lim_{x\to+\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right), \quad \text{i) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin\big(\cos(\sin x) - 1\big) + \frac{1}{2}x^2}{x^2 \sin^2 x}, \quad \text{j) } \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^x}{x^2(x - \sin x)}.$$

5. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby příslušná limita byla konečná a různá od 0 a spočtěte tuto limitu:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^n}, \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n},$$

$$\text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}.$$

6. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^4} = 0 \quad \text{a spočtěte} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^5},$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax + x\operatorname{arctg} bx - b}{x^4} \in \mathbb{R} \quad \text{a spočtěte ji.}$$

7. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \sin\frac{1}{n}\right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{n^3}}\right),$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right), \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$ b) $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3$
c) $e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{24}e^2(x-2)^4 + \frac{1}{120}e^2(x-2)^5$
2. a) 0,995 b) 0,0953 c) 1,65
3. a) $x - \frac{2}{3}x^3$ b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ c) $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ d) $1 - \frac{9}{2}(x-1)^2 - 9(x-1)^3$ e) x^9 f) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
g) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ h) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$ i) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$
4. a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{12}$ c) 0 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{3}$ g) -6 h) $\frac{1}{6}$ i) $\frac{5}{24}$ j) $\frac{1}{2}$
5. a) 1 ($n = 2$) b) $\frac{e}{2}$ ($n = 1$) c) $-\frac{7}{8}$ ($n = 3$) d) $\frac{1}{3}$ ($n = 4$) e) $\frac{1}{30}$ ($n = 7$)
6. a) $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ b) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$, limita je $-\frac{1}{20}$ c) $a = \pm\sqrt{2}, b = 1$, limita je $-\frac{1}{6}$
7. a) K b) K c) D d) K e) D f) K

2. MOCNINNÉ ŘADY

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad a vyšetřete jejich konvergenci v krajních bodech intervalu konvergence:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}, \quad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad \text{f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n, \quad \text{g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n, \quad \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n,$$

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},\ p \in \mathbb{R}, \quad \text{j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n,\ a > 0, \quad \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n, \quad \text{l)} \sum_{n=0}^{\infty} n! 3^{-n^2} x^n, \quad \text{m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n,}{a^{\sqrt{n}}},\ a > 0,$$

$$\text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n, \quad \text{o)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(3 + (-1)^n\big)^n}{n} x^n, \quad \text{p)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad \text{q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(na^n + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n,\ b > a > 0,$$

$$\text{r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{s)*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \quad \text{t)*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}.$$

Výsledky: 1. a) $R = 1$, ± 1 AK b) $R = 1$, -1 K, 1 D c) $R = 0$ d) $R = +\infty$ e) $R = 1$, ± 1 D f) $R = 3$, ± 3 D g) $R = +\infty$ h) $R = 1$, -1 K, 1 D i) $R = 1$, -1 D pro $p \le 0$, K pro $p > 0$, 1 D pro $p \le 1$, K pro $p > 1$ j) $R = 0$ pro $a \le 1$, $R = +\infty$ pro $a > 1$ k) $R = \frac{1}{3}$, $-\frac{4}{3}$ K, $-\frac{2}{3}$ D l) $R = +\infty$ m) $R = 1$, ± 1 D pro $a \le 1$, AK pro $a > 1$ n) $R = \frac{1}{e}$, $\pm\frac{1}{e}$ D o) $R = \frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{4}$ D p) $R = 1$, ± 1 D q) $R = \frac{1}{b}$, $\pm\frac{1}{b}$ AK r) $R = 1$, ± 1 AK s) $R = 4$, ± 4 D (Raabe) t) $R = \frac{1}{e}$, $-\frac{1}{e}$ K, $\frac{1}{e}$ D (Raabe+Taylor)

3. PRIMITIVNÍ FUNKCE

1. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $x^3 + 2x + \frac{17}{x}$, b) $18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x$, c) $\sqrt{x} + \sin(2x)$, d) $\cos(3x) + e^{2x}$, e) $(x+5)^3$,

f) $\sin(2x+7)$, g) $\frac{1}{\cos^2(3-2x)}$, h) $\frac{1}{2x-1}$, i) $\sqrt[3]{1-3x}$, j) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, k) $\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}$, l) $\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$, m) $\frac{x^2}{1+x^2}$,

n) $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$, o) $\frac{1}{2+3x^2}$, p) $\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$, q) $\sqrt{x^6}$, r) $\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}$, s) $\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$, t) $\operatorname{tg}^2 x$, u) $\operatorname{cotg}^2 x$,

v) $|\cos x|$, w) $\sqrt{1-\sin 2x}$, x) $\sin^2 x$, y) $\cos^4 x$, z) $\frac{1}{1+\cos x}$

2. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^{-x^2}, b) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$, c) $\operatorname{tg} x$, d) $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, e) $\frac{x^2}{\cos^2(x^3)}$, f) $\frac{x}{1+4x^2}$, g) $\frac{x}{1+x^4}$, h) $\frac{1}{x\log x}$, i) $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$,

j) $\frac{\sin\log x}{x}$, k) $\frac{e^x}{e^x+1}$, l) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, m) $\frac{x+1}{x^2+2x+9}$, n) $\frac{x^2}{x+1}$, o) $\frac{x^3}{x^8+2}$, p) $\sin^3 x$, q) $\frac{1}{x\log x\log\log x}$,

r) $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$, s) $\frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$, t) $\cos^5 x\sqrt{\sin x}$, u) $\operatorname{tg}^5 x$, v) $\frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, w) $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}}$

3. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^x, b) $\frac{x}{e^x}$, c) $\log x$, d) $x\log x$, e) x^2e^{-2x}, f) $\frac{\cos x}{e^x}$, g) $e^{3x+1}\sin x$, h) $\log^2 x$, i) $x^a\log x$, j) $e^{ax}\sin bx$,

k) $\operatorname{arctg} x$, l) $\arcsin x$, m) $e^{\sqrt{x}}$, n) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, o) $x^5e^{x^3}$, p) $x\sin^2 x$, q) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, r) $\sin\log x$,

s) $xe^x\sin x$, t) $\sqrt{1-x^2}$, u)* $\frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{x+1}{x^2+4}$, b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, c) $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$, d) $\frac{1}{3x^2-2x-1}$, e) $\frac{x}{x^2-x+2}$, f) $\frac{x^5}{x^2+x-2}$, g) $\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)}$,

h) $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, i) $\frac{x}{x^4-2x^2-1}$, j) $\frac{x^{17}-5}{x-1}$, k) $\frac{x^{17}-5}{x^2-1}$, l) $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$, m) $\frac{x}{x^3-1}$,

n) $\frac{3x+2}{(x^2+x+2)^2}$, o) $\frac{1}{1+x^4}$, p) $\frac{x^8+x-1}{x^6+1}$

5. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{1}{\sin x}$, b) $\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$, c) $\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, d) $\frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x - 1}$, e) $\frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$, f) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$,

g) $\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}$, h) $\frac{1}{\cos x\sin^3 x}$, i) $\frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$, j) $\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}$, k) $\frac{1}{\sin x + \tan x}$, l) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$,

m) $\frac{x}{1+\sin(x^2+1)}$, n) $\frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$, o) $\frac{1}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$, p) $\frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}, a, b > 0$,

q) $\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}, 0 < \varepsilon < 1$, r) $\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$, s) $\frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$, t) $\frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$, u) $\frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

6. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{x+3}}$, b) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, c) $\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$, d) $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, e) $\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$,

f) $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$, g) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}$, h) $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$, i) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, j) $\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, k) $\sqrt{x^2-2x}$,

l) $\sqrt{x^2-2x-1}$, m) $\frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$, n) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$, o) $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$, p) $\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,

q) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, r) $\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, s) $\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$, t) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(5-x)}}$

Návody: 5. a) $\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ b) per partes c) $\int \frac{-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ d) $\int \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t$ e) $6\int \frac{1}{t(1+t+t^2+t^3)}\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ g) $\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ h) $\int \frac{1}{t^3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ i) $\int \frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ j) $-\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ k) $\int \frac{1-t^2}{2t}\,\mathrm{d}t$ l) $-\int \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ m) $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u$, $\int \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ n) $\int \frac{1}{3t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$ o) $\int \frac{1+t^2}{(2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ p) $\int \frac{1}{a^2t^2+b^2}\,\mathrm{d}t$ q) $\int \frac{2}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)t^2}\,\mathrm{d}t$ r) $\int \frac{t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ s) $\int \frac{4t(t^2-1)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)}\,\mathrm{d}t$ t) $\int \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ u) $\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

6. a) $\int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$ b) $\int \frac{2(t^2-t+1)}{(t-2)(2t-1)}\,\mathrm{d}t$ c) $\int 6\frac{t^6-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$ d) $\int \frac{-2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ e) $\int \frac{6t^3(t^6-1)}{(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int 6t^3(t^3-1)(t^2-t+1)\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t$ g) $\int \frac{6t^5(t^2+t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t$ h) $\int \frac{3t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ i) $\int \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$ j) $\int \frac{6t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}\,\mathrm{d}t$ k) $\int \frac{8t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-t^2(t+2)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$ l) $\int \frac{16t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-(t^2+2t-1)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$ m) $\int \frac{t^2+1}{4(t^4+1)}\,\mathrm{d}t$ n) $\int \frac{2(t^2-1)^2}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t$ o) $\int \frac{-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ p) $\int \frac{-4\sqrt{2}t}{(1+t^2)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{t^2+2t-1}{(1-t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ q) $\int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ r) lze využít vzorec pro a^2-b^2, kde $a = 1+\sqrt{x}$ a $b = \sqrt{x+1}$ s) $\int \frac{2t(t^2-3t+2)}{(3-2t)(3t-4)}\,\mathrm{d}t$ t) $20\int \frac{t^4}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 17\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ b) $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ na $(0,+\infty)$ d) $\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{2}e^{2x}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{4}(x+5)^4$ na $\mathbb{R}$ f) $-\frac{1}{2}\cos(2x+7)$ na $\mathbb{R}$ g) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(3-2x)$ na $\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ h) $\frac{1}{2}\log|2x-1|$ na $(-\infty, \frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2}, +\infty)$ i) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$ na $\mathbb{R}$ j) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$ k) $-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ l) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$ na $(-\infty, \frac{2}{5})$ m) $x - \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ na $(0,+\infty)$ o) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ q) $\frac{1}{4}x^4 \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ r) $-\frac{2}{\log 5}5^{-x} + \frac{1}{5\log 2}2^{-x}$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ na $\mathbb{R}$ t) $-x + \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $-x - \operatorname{cotg} x$ na $(0,\pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k \sin x + 2k$ pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ w) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}k$ pro $x \in \langle -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\pi\rangle + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ x) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ na $\mathbb{R}$ y) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ na $\mathbb{R}$ z) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi,\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$ na $\mathbb{R}$ c) $-\log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d) $\sqrt{x^2+5}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$ na $\left(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right), k \in \mathbb{Z}$ f) $\frac{1}{8}\log(1+4x^2)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\log x|$ na $(0,1)$ a na $(1,+\infty)$ i) $\log(x^2+x+1)$ na $\mathbb{R}$ j) $-\cos\log x$ na $(0,+\infty)$ k) $\log(e^x+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$ m) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+9)$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,+\infty)$ o) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}$ na $\mathbb{R}$ p) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ na $\mathbb{R}$ q) $\log|\log\log x|$ na $(1,e)$ a na $(e,+\infty)$ r) $e^x - \log(1+e^x)$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\log x}$ na $(\frac{1}{e}, +\infty)$ t) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x$ na $(0,\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $\frac{1}{4}\cos^{-4} x - \cos^{-2} x - \log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$ w) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x$ na $\mathbb{R}$

3. a) $e^x(x-1)$ na $\mathbb{R}$ b) $-e^{-x}(1+x)$ na $\mathbb{R}$ c) $x(\log x - 1)$ na $(0,+\infty)$ d) $\frac{1}{2}x^2(\log x - \frac{1}{2})$ na $(0,+\infty)$ e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2})$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{10}e^{3x+1}(3\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ h) $x(\log^2 x - 2\log x + 2)$ na $(0,+\infty)$ i) $\frac{x^{1+a}}{1+a}\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$ na $(0,+\infty)$ pro $a \neq -1$, $\frac{1}{2}\log^2 x$ na $(0,+\infty)$ pro $a = -1$ j) $e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}$ na $\mathbb{R}$ k) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ na $(-1,1)$ m) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)$ na $(0,+\infty)$ n) $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{4}(x^2 - x\sin 2x + \sin^2 x)$ na $\mathbb{R}$ q) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}x$ na $(0,+\infty)$ r) $\frac{1}{2}x(\sin\log x - \cos\log x)$ na $(0,+\infty)$ s) $\frac{1}{2}e^x\left(x\sin x + (1-x)\cos x\right)$ na $\mathbb{R}$ t) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$ na $(-1,1)$ u) $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ na $\mathbb{R}$

4. a) $\frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ na $\mathbb{R}$ b) $x + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ c) $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ d) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$ na $(-\infty,-\frac{1}{3})$, na $(-\frac{1}{3},1)$ a na $(1,+\infty)$ e) $\frac{1}{2}\log(x^2-x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{32}{3}\log|x+2| + \frac{1}{3}\log|x-1|$ na $(-\infty,-2)$, na $(-2,1)$ a na $(1,+\infty)$ g) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ h) $2\log\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+2}$ na $(-\infty,-4)$, na $(-4,-2)$ a na $(-2,+\infty)$ i) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{|x^2-\sqrt{2}-1|}{x^2+\sqrt{2}-1}$ na $\left(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, na $\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ a na $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}, +\infty\right)$ j) $-4\log|x-1| + \sum_{k=1}^{17}\frac{x^k}{k}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ k) $3\log|x+1| - 2\log|x-1| + \sum_{k=1}^{8}\frac{x^{2k}}{2k}$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ l) $x + \frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3|$ na $(-\infty,0)$, na $(0,2)$, na $(2,3)$ a na $(3,+\infty)$ m) $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ n) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2x+1}{7+(2x+1)^2} + \frac{2\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$ na $\mathbb{R}$ (nápověda k rozkladu: pracujte s výrazem $(x^2+1)^2$) p) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$ na $\mathbb{R}$

5. a) $\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ na $(0,\pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) - \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$ na $\mathbb{R}$ c) $-\frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x)$ na $\mathbb{R}$ d) $\log\frac{1-\cos x}{|\cos x|}$ na $(-\frac{\pi}{2}, 0) + 2k\pi$, na $(0, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ a na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e) $x - 3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} - 3\log(e^{\frac{x}{6}}+1) - \frac{3}{2}\log(e^{\frac{x}{3}}+1)$ na $\mathbb{R}$

f) na $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$: $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x}$ na $(0, \frac{\pi}{2}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ i) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} - x + k\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (2k+1)\frac{(4-\sqrt{3})\pi}{2\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$ j) $\frac{1}{3}\log(2+\cos x) + \frac{1}{6}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x)$ na $(0,\pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ k) $\frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ na $(0, \frac{\pi}{2}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ l) na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) + 2k\pi$: $F(x) = x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ pro $x \neq \pi + 2k\pi$, $F(\pi + 2k\pi) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ m) na $\left(-\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1 - 2\pi}, -\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1}\right)$, na $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}\pi - 1}, \sqrt{\frac{3}{2}\pi - 1}\right)$ a na $\left(\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1}, \sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1 + 2\pi}\right)$, $k \in \mathbb{N}$: $F(x) = -\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x^2+1}{2}}$ pro $x \neq \pm\sqrt{\pi + 2k\pi - 1}$, $F(\pm\sqrt{\pi + 2k\pi - 1}) = 0, k \in \mathbb{Z}$ n) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ pro $x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi$, $F(\pi + 2k\pi) = (k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, $k \in \mathbb{Z}$ o) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{tg} x}{4(2+\operatorname{tg}^2 x)} + k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$
p) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + k\frac{\pi}{ab}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{ab}$, $k \in \mathbb{Z}$ q) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + k\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ pro $x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi$, $F(\pi + 2k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $k \in \mathbb{Z}$ r) na $\mathbb{R}$: $F(x) = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) - k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ s) na $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$: $F(x) = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|$ pro $x \neq \pi + 2l\pi$, $F(\pi + 2l\pi) = 0, k, l \in \mathbb{Z}$ t) na $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$: $F(x) = G(x)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(x) = G(x) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$, kde $G(x) = \frac{1}{6}\log\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{(\operatorname{tg} x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}}$ u) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x - 1\right) + k\sqrt{2}\pi$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\sqrt{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

6. a) $2\sqrt{x+3} - 2\log\left(1 + \sqrt{x+3}\right)$ na $(-3, +\infty)$
b) $\sqrt{x^2+x+1} - x + 2\log\left|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2\right| - \frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1\right|$ na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, +\infty)$
c) $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \log x + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, +\infty)$ d) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ na $(1,3)$ e) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - (x+1) + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ na $(-1, +\infty)$ f) $\frac{-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} - \log\left(\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1\right)$ na $\mathbb{R}$
g) $\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\log\left(\sqrt[6]{x+1} + 1\right)$ na $(-1, 0)$ a na $(0, +\infty)$
h) $-\log\left|1 - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right| + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$
i) $\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1, 0)$ a na $(0, 1)$ j) $\log\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, kde $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 0)$ a na $(0, +\infty)$ k) $\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\left(x(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}} + \log\left|\sqrt{\frac{x-2}{x}} - 1\right| - \log\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}} + 1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x} + \frac{1}{2}\log\left|\sqrt{x^2-2x} - x + 1\right|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(2, +\infty)$
l) $\operatorname{sgn}(x-1+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{2}(x-1)(x-1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}} + \log\left|\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}} - 1\right| - \log\left(\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}} + 1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} + \log\left|\sqrt{x^2-2x-1} - x + 1\right|$, na $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ a na $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ m) $\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}} + 1\right)$ na $(-2, 2)$ n) $\frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{8}\log\left(2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1\right)$ na $\mathbb{R}$ o) $-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1, 1)$
p) $\log\left(t + \sqrt{2} - 1\right) - \log\left(t + \sqrt{2} + 1\right) - 2\operatorname{arctg} t$, kde $t = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}-x}{x+1+\sqrt{2}}}$, na $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$; nebo $-\log(1-t) - 2\operatorname{arctg} t$, kde $t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$, na $(-1-\sqrt{2}, 0)$ a na $(0, -1+\sqrt{2})$, lze slepit v 0 q) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ na $(1, +\infty)$
r) $\frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$ na $(0, +\infty)$ s) $\frac{t}{18} - \frac{t^2}{6} + \frac{3}{4}\log|2t-3| - \frac{16}{27}\log|3t-4|$, kde $t = \sqrt{x^2+3x+2} - x$, na $(-\infty, -2)$, na $(-1, -\frac{2}{3})$ a na $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ t) $\frac{5}{4\sqrt{2}}\log\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1) + \frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1) - \frac{5t}{1+t^4}$, kde $t = \sqrt[4]{\frac{x}{5-x}}$, na $(0, 5)$

4. Určité integrály

1. Spočtěte tyto určité integrály:

$$\text{a)}\ \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{b)}\ \int_0^{\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{c)}\ \int_0^{\frac{9}{2}\pi} \sin^n x \cos x\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{d)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x},$$

$$\text{e)}\ \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}, \quad \text{f)}\ \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x, \quad \text{g)}\ \int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x, \quad \text{h)}\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}, \quad \text{i)}\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}, \quad \text{j)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2},$$

$$\text{k)}\ \int_0^{8\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x},\ 0<\varepsilon<1, \quad \text{l)}\ \int_0^{\pi} (x\sin x)^2\,\mathrm{d}x$$

Výsledky: 1. a) $n!$ b) $\pi\frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n sudé, $2\frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n liché c) $\frac{1}{n+1}$ d) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ g) 1 h) $\frac{2}{3}\log 2$ i) $\frac{1}{2}$ j) 0 k) $\frac{8\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ l) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

5. Konvergence integrálů

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$):

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{b)}\ \int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x,\quad \text{c)}\ \int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{d)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{e)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{f)}\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{g)}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x,\quad \text{h)}\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\log x},\quad \text{i)}\ \int_1^2 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{j)}\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{k)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \text{l)}\ \int_7^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{m)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x,\quad \text{n)}\ \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{o)}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{p)}\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{q)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{r)}\ \int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{s)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{t)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{u)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x\,\mathrm{d}x,\quad \text{v)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x(1-\cos x)^\gamma\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{w)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,\mathrm{d}x,\quad \text{x)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x,\quad \text{y)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\cdot\log\cos x\,\mathrm{d}x,\quad \text{z)}\ \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\text{a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{b)}\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\sin\frac{1}{x}}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{d)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\quad \text{e)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{f)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{g)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{h)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sin^3 x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x,\quad \text{i)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\quad \text{j)}\ \int_0^{+\infty} x\cos(x^4)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{k)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,\mathrm{d}x,\quad \text{l)}\ \int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x,\quad \text{m)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{n)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\,\mathrm{d}x,\quad \text{o)}\ \int_1^{+\infty} \sin(\log x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{p)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\quad \text{q)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)\cdot\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\quad \text{r)}\ \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x+2\sin x}\,\mathrm{d}x,\quad \text{s)}\ \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{t)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\quad \text{u)*}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+\log x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Návody: 1. b) výpočet c) rozdíl integrálů k) růstová škála p) pro $\alpha = 1$ substituce r) $\log\frac{1}{y} = -\log y$ s) Taylor t) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^\alpha}$ spočteme substitucí $x = \operatorname{cotg} y$ z) $\lim_{x\to1-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\beta}$ spočteme substitucí $x = \cos y$

2. d) BC, $|\sin x| \geq \sin^2 x$ g) rozdíl integrálů nebo Abel h) $|\sin x|^3 \geq \sin^4 x$ j)–o) substituce q) substituce r), s) součet integrálů t) $\sin(a+b)$ u) substituce

Výsledky: 1. a) K b) K c) D d) D e) K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ f) D g) K $\Leftrightarrow \alpha < -1 < \alpha + \beta$ h) D i) K j) K k) K l) K m) K n) K $\Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ o) K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ p) K $\Leftrightarrow \alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$ q) K $\Leftrightarrow -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ r) K $\Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$ s) K $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 4$ t) K u) K $\Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ v) K $\Leftrightarrow \beta > -1, \alpha + 2\gamma > -1$ w) K $\Leftrightarrow \max\{\alpha, \beta\} > 1$, $\min\{\alpha, \beta\} < 1$ x) K $\Leftrightarrow 0 < \alpha + 1 < \beta$ y) K $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 1$ z) K $\Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$

2. a) D b) AK c) AK d) AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ e) NAK f) AK g) D h) NAK i) AK pro $1 < \alpha < 5$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ j) NAK k) NAK l) AK pro $\alpha < -1$, NAK pro $\alpha > 1$ m) NAK n) NAK o) D p) AK pro $1 < \alpha < 3$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ q) AK pro $1 < \alpha < 2$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ r) NAK s) D t) NAK pro $0 < \alpha < 2$ u) AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$

6. Aplikace určitého integrálu

1. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami:

$$\text{a) } y=\frac{2}{1+x^2},\ y=x^2, \quad \text{b) } y=x^2-6x+8,\ y=7-4x,\ y=2x-8,$$

$$\text{c) } y=\frac{x^2}{p},\ y=\frac{x^2}{q},\ y=\sqrt{ax},\ y=\sqrt{bx},\ 0<a<b,\ 0<p<q$$

2. Vypočtěte plochu elipsy.

3. Vypočtěte délku křivky, která je grafem funkce:

$$\text{a) } \log\cos x,\ x\in\langle 0,\tfrac{\pi}{6}\rangle, \quad \text{b) } x^{\frac{3}{2}},\ x\in\langle 0,4\rangle, \quad \text{c) } e^x,\ x\in\langle 0,a\rangle,\ a>0$$

4. Vypočtěte obvod kruhu.

5. Vypočtěte délku křivky dané parametrickým vyjádřením ($a>0$):

$$\text{a) } x(t)=a(t-\sin t),\ y(t)=a(1-\cos t),\ t\in\langle 0,2\pi\rangle, \quad \text{b) } x(t)=a(\cos t+t\sin t),\ y(t)=a(\sin t-t\cos t),\ t\in\langle 0,2\pi\rangle$$

6. Vyjádřete parametricky asteroidu, tj. rovinný útvar $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, $a>0$ a vypočtěte jeho délku.

7. Vypočtěte délku části Archimédovy spirály zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r=a\varphi$, $\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$, $a>0$.

8. Vypočtěte objem a) koule, b) kužele, c) rotačního elipsoidu, d) anuloidu.

9. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ležícího v rovině xy kolem osy x. Obrazec je ohraničen křivkami jejichž rovnice jsou $x^2-\frac{1}{2}y^2=1$ a $y^2-x^2=1$.

10. Vypočtěte povrch a) koule, b) kužele, c) anuloidu.

11. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y=\frac{x^2}{2}$, $x\in\langle 0,\frac{3}{4}\rangle$ kolem osy x.

Výsledky: 1. a) $\pi-\frac{2}{3}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{1}{3}(b-a)(q-p)$

2. πab

3. a) $\frac{1}{2}\log 3$ b) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ c) $a-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2a}}+\log(1+\sqrt{2})-\log(1+\sqrt{1+e^{2a}})$

4. $2\pi r$

5. a) $8a$ b) $2\pi^2$

6. $6a$

7. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\log\big(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\big)$

8. a) $\frac{4}{3}\pi r^3$ b) $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ c) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ d) $2\pi^2 Rr^2$

9. $\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}-2)$

10. a) $4\pi r^2$ b) $\pi\big(r\sqrt{r^2+v^2}+r^2\big)$ c) $4\pi^2 rR$

11. $\frac{\pi}{16}\big(\frac{255}{64}-2\log 2\big)$

7. Funkce více proměnných – řezy, limita a spojitost

1. Určete a nakreslete definiční obor, vrstevnice a (pokud to lze) řezy rovnoběžné s rovinami yz a xz:

$$\text{a) } x+\sqrt{y},\quad \text{b) } \frac{y}{x},\quad \text{c) } x^2+y^2,\quad \text{d) } x^2-y^2,\quad \text{e) } |x|+y,\quad \text{f) } \min\{x,y\},\quad \text{g) } \max\{x,y\},\quad \text{h) } \sqrt{xy},$$

$$\text{i) } \sqrt{1-x^2-y^2},\quad \text{j) } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}},\quad \text{k) } \arcsin\frac{x}{y},\quad \text{l) } \sqrt{1-(x^2+y)^2},\quad \text{m) } \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)},$$

$$\text{n) } \sqrt{\sin(x^2+y^2)},\quad \text{o) } \operatorname{sgn}(\sin x\cdot\sin y)$$

2. Vyšetřete $\lim\limits_{x\to0}\big(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\big)$, $\lim\limits_{y\to0}\big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\big)$ a $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde

$$\text{a) } f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},\quad \text{b) } f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x} \text{ pro } x\neq0,\ f(0,y)=0$$

3. Vyšetřete následující limity:

$$\text{a) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\quad \text{b) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}},\quad \text{c) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{1}{x^2+y^4},\quad \text{d) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{e) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy}{x^2+y^2},\quad \text{f) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{g) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2}{x^2+y^2},\quad \text{h) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^2}{x^2+y^4},$$

$$\text{i) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+(x-y)^2}},\quad \text{j) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{k) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^3+x^2+y^3+y^2}{x^2+y^2},$$

$$\text{l) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},\quad \text{m) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2},\quad \text{n) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}},$$

$$\text{o) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}(x^2+y^2)^{x^2y^2},\quad \text{p) } \lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]}(x^2+y^2+z^2)^{xyz},\quad \text{q) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}(x^2+y^2)^{xy},\quad \text{r) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4},$$

$$\text{s) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^4},\quad \text{t) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin x\sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)},\quad \text{u) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{2-\cos x-\cos y}{x^2+y^2},\quad \text{v)* } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}},$$

$$\text{w)* } \lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x+y\neq0}}\frac{\sin x+\log(1+y)}{x+y}$$

4. Lze funkci $\frac{\sin(xy)}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

5. Lze funkci $\frac{\sin x+\sin y}{x+y}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

Výsledky: 1. a) $D_f=\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, vrstevnice jsou „levé poloviny“ parabol b) $D_f=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, vrstevnice jsou přímky procházející počátkem c) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině $c\geq0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{c}$ d) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou hyperboly a jedna dvojice přímek e) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině $c\in\mathbb{R}$ je graf funkce $c-|x|$ f) $D_f=\mathbb{R}^2$ g) $D_f=\mathbb{R}^2$ h) $D_f=[0,+\infty)^2\cup(-\infty,0]^2$, vrstevnice na hladině $c>0$ jsou hyperboly tvaru $\frac{c^2}{x}$, na hladině 0 je to dvojice os i) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq1\}$, vrstevnice na hladině $0\leq c\leq1$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1-c^2}$ j) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2>1\}$, vrstevnice na hladině $c>0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}$ k) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ y\geq|x|>0\}\cup\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ y\leq-|x|<0\}$, vrstevnice jsou přímky procházející počátkem l) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ -1-x^2\leq y\leq1-x^2\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, na hladině 1 jedna parabola m) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq x^2+y^2\leq4\}$, vrstevnice na hladině $0\leq c<\frac{3}{2}$ jsou dvojice kružnic se středy v počátku a poloměry $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5\pm\sqrt{9-4c^2}}$, na hladině $\frac{3}{2}$ jedna kružnice se středem v počátku a poloměrem $\frac{\sqrt{10}}{2}$
n) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ 2k\pi\leq x^2+y^2\leq(2k+1)\pi, k\in\mathbb{N}_0\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic se středy v počátku
o) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině -1 a 1 jsou „šachovnice“, na hladině 0 mřížka

2. a) dvojnásobné limity jsou 0, dvojná neexistuje b) prostřední limita neexistuje, ostatní jsou 0

3. a) 1 b) 0 c) $+\infty$ d) 0 e) neexistuje f) 0 g) neexistuje h) neexistuje i) 0 j) neexistuje k) 1 l) 2 m) 0 n) 1 o) 1 p) 1 q) 1 r) 0 s) neexistuje t) neexistuje u) $\frac{1}{2}$ v) 0 w) neexistuje

4. ANO

5. ANO ($f(a,-a)=\cos a$)

8. Funkce více proměnných – parciální derivace, totální diferenciál

1. Vyšetřete parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí (případně dodefinovaných nulou v počátku):

a) $x^m y^n,\ m, n \in \mathbb{N}$ b) e^{xy}, c) $xy + yz + xz$, d) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, e) $\sqrt{x^2 + y^2}$, f) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$, g) $|xy|$,

h) $\sqrt[3]{xy}$, i) $x + y \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, j) $|y - \sin x|$, k) $\sqrt[3]{x + y^2}$, l) $\sqrt{|xy|}$, m) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, n) $\dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$,

o) $x + y + \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, p) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \log(1 + xy)$, q) $e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}}$, r) $(x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, s) $xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

t) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, u) $x^{\frac{y}{z}}$, v) x^{y^z}, w)* $|\sin y - \sin x|$, x)* $\sqrt[3]{x^2 + y} \log(x^2 + y^2)$, y)* $\dfrac{x^2 y(|x| + |y|)}{x^4 + y^2}$

Výsledky: 1. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$, totální diferenciál existuje všude b) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$, TD existuje všude c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$, TD existuje všude d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ pro $x^2 + y^2 < 1$, TD existuje pokud $x^2 + y^2 < 1$ e) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ mimo počátek, TD existuje všude kromě počátku f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ pokud $y \ne -x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, TD existuje všude kromě $y = -x$ g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy a v počátku h) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x \ge 0 \wedge y \ge x) \vee (x \le 0 \wedge y \le x)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \ne 0$ a $x \ne y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{2\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \ne y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde $\frac{\partial f}{\partial x}$ j) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\operatorname{sgn}(y - \sin x) \cos x$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(y - \sin x)$ pokud $y \ne \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo $y = \sin x$
k) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ pokud $x \ne -y^2$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD
l) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}$ pokud $x \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{2}\sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|}$ pokud $y \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy m) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje mimo počátek n) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude o) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + \frac{xy(2x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, TD existuje všude
p) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (y > -\frac{1}{x} \wedge x > 0) \vee (y < -\frac{1}{x} \wedge x < 0) \vee (x = 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x+y)}{(x^2+y^2)(1+xy)} - \frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\log(1+xy)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x+y)}{(x^2+y^2)(1+xy)} + \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\log(1 + xy)$ pro $[x, y] \in D_f \setminus \{[0, 0]\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude mimo počátek q) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude r) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude s) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude t) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \log\frac{x}{y}$, TD existuje všude u) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x > 0 \wedge z \ne 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}}\frac{1}{z}\log x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}}\frac{y}{z^2}\log x$, TD existuje všude v) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x > 0 \wedge y > 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} z y^{z-1}\log x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \log x \log y$, TD existuje všude w) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)\cos x$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin y - \sin x)\cos y$ pokud $\sin y \ne \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD x) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} + \frac{2x\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} + \frac{2y\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ pro $y \ne -x^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x^2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x^2) = 0$ pokud $x^2 + x^4 = 1$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD y) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy\left((3y^2-x^4)|x|+2(y^2-x^4)|y|\right)}{(x^4+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3\left((x^4-y^2)\operatorname{sgn} x+2x^3|y|\right)}{(x^4+y^2)^2}$ pokud $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje mimo počátek

9. Funkce více proměnných – derivace složené funkce

1. Nechť $f(u,v) = uv$ a nechť $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\} \to \mathbb{R}^2$ je definováno předpisem $g(x,y) = \left[(x^2+y^2)(e^x-1), \frac{y^2}{x^2+y^2}\right]$. Vypočtěte $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)$, kde $F = f \circ g$.

2. Nechť $\nabla f(2,2,2) = [1,2,3]$ a nechť $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem $g(x,y,z) = [x+y+z, x^2+y^2+1, x^3+y^3+1]$. Vypočtěte $\nabla F(0,1,1)$, kde $F = f \circ g$.

3. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všude totální diferenciál. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$, kde $F = f \circ g$ a $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ je dáno předpisem

$$\text{a) } g(x,y) = \sin x \cos y, \quad \text{b) } g(x,y) = \left[x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy\right], \quad \text{c) } g(x,y) = \left[\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\right].$$

4. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to (0,+\infty)$ má všude totální diferenciál. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$, kde $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\text{a) } F(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}, \quad \text{b) } F(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}.$$

5. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $[1,1]$ a splňuje $f(1,1) = 1$. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)$, je-li

$$\text{a) } F(x,y) = f\big(f(y,x), f(x,y)\big), \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2, \quad \text{b) } F(x,y) = f\big(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}\big).$$

6. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $[a,b]$. Nalezněte jej, platí-li

$$\text{a) } F(r,\alpha) = f(r\cos\alpha, r\sin\alpha), \ [a,b] = [1,1], \ \frac{\partial F}{\partial r}\big(\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}\big) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial \alpha}\big(\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}\big) = 4,$$

$$\text{b) } F(u,v) = f(e^u\cos v, e^u \sin v), \ [a,b] = [1,0], \ \frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = 7, \ \frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = -1.$$

Výsledky: 1. $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = e$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 2e-2$

2. $\nabla F(0,1,1) = [1,14,1]$

3. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(\sin x\cos y)\cdot\cos x\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -f'(\sin x \cos y)\cdot \sin x \sin y$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x\frac{\partial f}{\partial t}(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy) + 2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy) + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y\frac{\partial f}{\partial t}(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy) - 2y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy) + 2x\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$ c) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial t}\big(\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\big)\cdot\frac{x}{y} - \frac{\partial f}{\partial u}\big(\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\big)\cdot\frac{2y}{(x-y)^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\big(\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\big)\cdot x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial t}\big(\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\big)\cdot\frac{1-x^2}{2y^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\big(\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\big)\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\big(\frac{x^2-1}{2y}, \frac{x+y}{x-y}, x^2-y^2\big)\cdot y$

4. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)(\log f(x,y)+1)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,y)(\log f(x,y)+1)$
b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\Big(\frac{\partial f}{\partial u}(y,x)\log f(x,y) + \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\Big)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(y,x)\log f(x,y) + \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,y)\Big)$

5. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 4$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\big)^2$

6. a) $\nabla f(1,1) = [-2,2]$ b) $\nabla f(1,0) = [7,-1]$