

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkci $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X , pokud

- (i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

Tvrzení 2. Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} .

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X .

(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X .

(c) Zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ jsou spojitá.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X; \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X; \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X .
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X .
- Množina $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3. Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X .

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X .

Definice 5. Necht' P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P . Řekneme, že metriky ρ a σ jsou *ekvivalentní*, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou *skoro stejné*, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Tvrzení 6. Necht' X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.

Definice 7 (ekvivalentní normy). Necht' X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X . Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8. Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 9. Necht' X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X , $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Tvrzení 10. Necht' X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.
- (ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
- (iii) Zobrazení $Id: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.
- (iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

Definice 11. Necht' X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Necht' $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů x_1, \dots, x_n s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 12. Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.

Definice 13. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M; C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 14. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 15. Necht' X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16. Necht' M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X , která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Definice 17. Necht' X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako $\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M; Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a uzavřený konvexní obal M jako $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{C \supset M; C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18. Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak \overline{Y} je podprostor X a \overline{C} je konvexní množina.

Tvrzení 19. Necht' X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span}} M$ a $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv}} M$.

Věta 20. Necht' X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.

Důsledek 21. Necht' X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X .

Věta 22.

(a) Prostor c_0 je separabilní.

(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.

(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.

(d) Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovskými měřitelná a $1 \leq p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 23. Necht' $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 24. Necht' X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X . Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 25 (Test úplnosti). Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Definice 26. Necht' X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X . Symbol $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ . Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F: \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 27. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset: \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 28. Necht' $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X . Pak platí:

- (a) Její součet je určen jednoznačně.
- (b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
- (c) Je-li $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x$, pak $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ pro každou permutaci (tj. bijekci) $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma$.
- (d) $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Tvrzení 29. Necht' $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když

$$\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma; F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma; F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

Věta 30. Necht' X je Banachův prostor.

- (a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
- (b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.
- (c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

Tvrzení 31.

- (a) Necht' zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k x .
- (b) Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a necht' zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konverguje k x .
- (c) Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

Důsledek 32. Necht' X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

Definice 33. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 34. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně.
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Věta 35. Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní. Každá řada v \mathbb{R} je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T: X \rightarrow Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad \mathbb{K} se nazývá lineární, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 36. Necht' X, Y jsou vektorové prostory, $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\text{conv } M) = \text{conv } T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.

Tvrzení 37. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je spojitý.
- (ii) T je spojitý v jednom bodě.

- (iii) T je spojitý v 0.
- (iv) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.
- (v) T je lipschitzovská.
- (vi) T je stejnoměrně spojitý.
- (vii) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
- (viii) $T(B_X)$ je omezená.
- (ix) $T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 38. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- (a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.
- (b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.
- (c) $\|T\| = \inf \{C \geq 0; \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.

Fakt 39. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \rightarrow T(x)$ v prostoru Y .

Fakt 40. Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

Věta 41. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 42. Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X .

Věta 43. Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.

Lemma 44. Necht' X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \text{dist}(x, \text{Ker } f)$.

Definice 45. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen *izomorfismus*), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- *izomorfismus* X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen *izometrie*), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- *izometrie* X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y ;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y .

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y , pokud existuje lineární izomorfismus X do Y ;
- *izometricky vnořen* do Y , pokud existuje lineární izometrie X do Y .

Poznámka 46. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T: X \rightarrow Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 47. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory.

- (a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.
- (b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.
- (c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\text{Rng } T$ je uzavřený v Y .

Fakt 48. Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

- (a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.
- (b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Věta 49. Necht' X, \widehat{X} a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v \widehat{X} a Y je úplný. Necht' dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T , tj. $\widehat{T} \upharpoonright_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 50 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X , pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\text{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Věta 51. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) $\dim X < \infty$.
- (ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
- (iii) B_X je kompaktní.
- (iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojitě.
- (v) Každá lineární forma na X je spojitá.
- (vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad \mathbb{K} a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 52. Necht' $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence \sim na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme \widehat{x} jako třídu ekvivalence obsahující x , tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X; y \sim x\} = \{y \in X; y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x}; x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha \widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 53. Necht' X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y . Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q: X \rightarrow X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \\ &= \text{dist}(x + Y, 0) = \text{dist}(x, Y), \end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 54. *Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q: X \rightarrow X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Věta 55. *Necht' X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Definice 56. Necht' X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním* (též *algebraickým*) *součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \text{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X , pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X .

Definice 57. Necht' X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P: X \rightarrow X$ se nazývá (*lineární*) *projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 58. *Necht' X je vektorový prostor.*

(a) *Je-li $P : X \rightarrow X$ lineární projekce, pak $P \upharpoonright_{\text{Rng } P} = \text{Id}_{\text{Rng } P}$.*

(b) *Je-li Y podprostor X a $P : X \rightarrow Y$ lineární zobrazení splňující $P \upharpoonright_Y = \text{Id}_Y$, pak P je projekce X na Y .*

Tvrzení 59. *Necht' X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = \text{Id}_X$, $\text{Rng } P_A = A$, $\text{Ker } P_A = B$, $\text{Rng } P_B = B$ a $\text{Ker } P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X , pak $X = A \oplus B$, kde $A = \text{Rng } P$, $B = \text{Ker } P$ a $P = P_A$.*

Věta 60. *Necht' X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X .*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X , je A algebraicky izomorfní s X/Y ; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.*

Definice 61. *Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y (značíme $\text{codim } Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).*

Definice 62. *Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B , pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X , pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X . Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).*

Věta 63. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

(a) *Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

(b) *Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.*

Věta 64. *Necht' X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T : X \rightarrow Y \oplus_t Z$, $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$ je izomorfismus.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 65. *Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad \mathbb{K} rozumíme funkci $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:*

- (i) *funkce $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,*
- (ii) *$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pro každé $x, y \in X$,*
- (iii) *$\langle x, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,*
- (iv) *$\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.*

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Tvrzení 66 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak*

- (i) *$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$ pro každé $x, y \in X$.*
- (ii) *Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X .*

Definice 67. *Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Tvrzení 68. *Necht' $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad \mathbb{K} . Pak funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Fakt 69. *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \text{Re} \langle x, y \rangle.$$

Tvrzení 70 (rovnoběžníkové pravidlo). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Tvrzení 71 (polarizační vzorec). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním případě.

Důsledek 72. *Necht' X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T: X \rightarrow Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Věta 73. *Necht' X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad \mathbb{K} . Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y , a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

Definice 74. *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A, y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X; x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A .*

Fakt 75 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.). *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Lemma 76. *Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.*

Lemma 77. *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934). *Necht' C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.*

Lemma 79 (F. Riesz, 1934). *Necht' X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Věta 80 (F. Riesz, 1934). *Necht' Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pak $H = Y \oplus Y^\perp$ a projekce $P_Y: H \rightarrow Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^\perp$ má následující vlastnosti:*

- (i) $\|P_Y(x) - x\| = \text{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ pro každé $x \in H$,
- (ii) $\|P_Y(x)\| \leq \|x\|$ pro každé $x \in H$.

Věta 81. *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Definice 82. *Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je*

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A, x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A ;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ .

Fakt 83. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A, x \neq y$.*

Věta 84. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Lemma 85. *Necht' $\{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

Fakt 86. *Necht' $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\|\sum_{i \in F} a_i e_i\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry $a_i, i \in F$.*

Důsledek 87. Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.

Lemma 88. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v X . Označme $Y = \text{span}\{e_i; i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y^\perp$.

Věta 89 (Besselova nerovnost). Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.

Věta 90. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v X . Uvažujme následující tvrzení:

- (i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).
- (ii) $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ pro každé $x \in X$.
- (iii) $\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.
- (iv) $X = \overline{\text{span}}\{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$.
- (v) $\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.

Pak (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Důsledek 91. Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H , je zobrazení $T: H \rightarrow \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ .

Tvrzení 93. Necht' X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.

Věta 94 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934)). Necht' H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcional definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I: H \rightarrow H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^* .

Lemma 95. Necht' X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \text{Ker } f$. Pak $X = \text{Ker } f \oplus \text{span}\{x\}$. Tedy $\text{codim Ker } f = 1$.

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Tvrzení 96. Necht' X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když $\text{Re } f$ je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí $\text{Im } f(x) = -\text{Re } f(ix)$ pro každé $x \in X$.

Definice 97. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkce $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcional*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p: X \rightarrow [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 98 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). Necht' X je vektorový prostor a Y je podprostor X .

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcional na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F \upharpoonright_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F \upharpoonright_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Věta 99 (Hahnova-Banachova). Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F \upharpoonright_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 100. Necht' X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Důsledek 101 (Duální vyjádření normy). Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

Věta 102 (Oddělování bodu a podprostoru). Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = \text{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 103. Necht' X je normovaný lineární prostor.

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.

(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

Definice 104. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*; f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_\perp = \{x \in X; f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 105. Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

(a) A^\perp je uzavřený podprostor X^* ,

(b) B_\perp je uzavřený podprostor X ,

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}} A$,

(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\text{span}} B$.

2. Reprezentace duálů

Tvrzení 106. Necht' X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.

Definice 107. Necht' $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sduženým exponentem k p* , pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 108 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům).

(a) Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I: \ell_1 \rightarrow c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdužený exponent k p , pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I: \ell_q \rightarrow \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdužený exponent k p , pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I: L_q(\mu) \rightarrow L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ -konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I: L_\infty(\mu) \rightarrow L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu.$$

Věta 109. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Necht' q je sdužený exponent k p . Pak zobrazení $I: X^* \oplus_q Y^* \rightarrow (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Definice 110. Necht' K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 111. Necht' K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojité a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.

Věta 112 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). Necht' K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, d\mu$ pro každé $f \in C(K)$.

Věta 113 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$). Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I: M(K) \rightarrow C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Lemma 114. Necht' K je kompaktní prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.

Věta 115. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor:

(a) Necht' Y je uzavřený. Zobrazení $I: Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\hat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie Y^\perp na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I: X^*/Y^\perp \rightarrow Y^*$ dané předpisem

$$I(\hat{f}) = f \upharpoonright_Y$$

je lineární izometrie X^*/Y^\perp na Y^* .

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s Y^\perp a Y^* lze identifikovat s X^*/Y^\perp .

3. Druhý duál a reflexivita

Definice 116. Necht' X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^* . Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 117. Necht' X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}* .

Tvrzení 118. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**} .

Tvrzení 119. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak $\dim X^* = \dim X$, a to i v případě, že $\dim X = \infty$.

Věta 120. Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X , pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2 , která je na X identitou.

Definice 121. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 122. Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Věta 123. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.

(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Příklady 124.

- (a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.
- (b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.
- (c) Prostory $c_0, \ell_1, \ell_\infty, L_1([0, 1]), L_\infty([0, 1])$ a $C([0, 1])$ nejsou reflexivní.
- (d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**} .

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 125 (Princip stejnoměrné omezenosti). *Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.
- (ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 126. *Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.*

Definice 127. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 128 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Lemma 129 (J. P. Schauder, 1930). *Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset T(U(0, r))$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.*

Důsledek 130 (S. Banach, 1929). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y , právě když T je prostý a na.*

Důsledek 131. *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:*

- (a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.
- (b) Zobrazení $\hat{T}: X/\text{Ker } T \rightarrow Y$ dané předpisem $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\text{Ker } T$.

Definice 132. Je-li $f: X \rightarrow Y$ zobrazení množiny X do množiny Y , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení f* . Říkáme, že zobrazení $f: X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má *uzavřený graf*, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 133 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojitý, právě když má uzavřený graf.*

IV. Lineární operátory

1. Duální operátory

Definice 134. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ definovaný předpisem

$$T^*f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T . (Ve Větě 135 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**} .

Věta 135. *Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

- (a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^*f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.
- (b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

Věta 136. Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí

(a) $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,

(b) $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)^\perp$,

(c) $\overline{\text{Rng } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp$,

(d) $\overline{\text{Rng } T^*} \subset (\text{Ker } T)^\perp$.

(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\text{Rng } T$ je uzavřený, pak $\text{Rng } T^* = (\text{Ker } T)^\perp$.

Tvrzení 137 (J. P. Schauder, 1930). Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X: X \rightarrow X^{**}$ a $\varepsilon_Y: Y \rightarrow Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon: Y \rightarrow \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S: \varepsilon_X(X) \rightarrow \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**} \upharpoonright_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Věta 138. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) T^* je prostý, právě když $\text{Rng } T$ je hustý v Y .

(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.

Jsou-li X, Y úplné, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

2. Kompaktní operátory

Definice 139. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y . Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\text{Rng } T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 140. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T: X \rightarrow Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X , pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 141. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z , pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\text{Rng } T \subset Z$, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Věta 142. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ pro každé $x \in X$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $\text{Rng } T$ je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Věta 143 (J. P. Schauder, 1930). Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 144. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Definice 145. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T , pokud $\text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\text{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ . Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ . Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_p(T)$.*

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 146. *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina \mathbb{K} splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Lemma 147. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

Tvrzení 148. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

Věta 149. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

Tvrzení 150. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \text{Rng } T$, pak $0 \in \sigma_p(T)$.*

Věta 151. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\text{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

Věta 152 (Fredholmova alternativa). *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důsledek 153. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.*

Lemma 154. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 155. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důsledek 156. *Necht' X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T , přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 157 (Druhá Fredholmova věta). *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned} \text{Rng}(\lambda I_X - T) &= (\text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*))_{\perp}, \\ \text{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) &= (\text{Ker}(\lambda I_X - T))^{\perp}. \end{aligned}$$

Věta 158 (Třetí Fredholmova věta). *Necht' X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \text{Ker}(\lambda I_X - T) = \text{codim Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \text{codim Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

Definice 159. *Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 160. *Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g, h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$.*

(a) *Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

(b) *Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.*

(c) Necht' $1 \leq p, q, r \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ -s. v. na \mathbb{R}^d .

Lemma 161. Necht' $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ je Lebesgueovsky měřitelná.

(a) Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x - y)$ Lebesgueovsky měřitelná na \mathbb{R}^d .

(b) Funkce $(x, y) \mapsto f(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x - y)$ jsou Lebesgueovsky měřitelné na $(\mathbb{R}^d)^2$.

Lemma 162. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x - y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

Definice 163. Necht' $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x - y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 164. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f \in L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Pak zobrazení $\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojitě.

Věta 165. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$.

(a) Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě \mathbb{R}^n , je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(b) Je-li $f \in L_1^{\text{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě \mathbb{R}^d , je spojitá a platí $\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$.

(c) Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D , pak $f * g$ je měřitelná na D .

(d) Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ -s. v. na \mathbb{R}^d , $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(e) Necht' $1 \leq p, q \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ -s. v. na \mathbb{R}^d , $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Definice 166. Necht' $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme *multiindexem* délky d . Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d , pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α , tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 167. Necht' $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}); \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá *prostor testovacích funkcí* na A .

Věta 168. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d a $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\text{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d .

Definice 169. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d . Funkci $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ budeme nazývat *regularizačním jádrem* (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 170. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d , g je regularizační jádro na \mathbb{R}^d a $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na \mathbb{R}^d , potom $f * g_n \rightarrow f$ stejnoměrně na \mathbb{R}^d .

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

Důsledek 171. Necht' μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na \mathbb{R}^d , $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položíme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na \mathbb{R}^d .

Definice 172. Necht' $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 173. Prostorem $C_b(\mathbb{R}^d) = C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na \mathbb{R}^d s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 174. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na \mathbb{R}^d takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d; |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Je-li $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 175 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903)). Necht' $f \in L_1(\mu_d)$. Pak $\lim_{\|t\| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = 0$.

Věta 176. Necht' $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:

(a) $\widehat{\widehat{f}} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojitě lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Necht' $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y, t \rangle} \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y, x \rangle} f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) Je-li $c > 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = c^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{h} = \widehat{\widehat{f}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na \mathbb{R}^d a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = i t_j \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -i x_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \widehat{g} d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g} d\mu_d$.

Lemma 177. Necht' $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a, +\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a, b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a, +\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a, +\infty))$, pak $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Lemma 178. Necht' $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě \mathbb{R} a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f' g d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} f g' d\lambda$.

Lemma 179. Necht' $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1, \dots, d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na \mathbb{R}^d a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g d\lambda = - \int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} d\lambda$.

Příklad 180. Definujme funkci $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce \widehat{g} je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g} d\mu_d = 1$.

Lemma 181. Necht' $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položíme $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t, x \rangle} h_n(t) d\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

Věta 182 (o inverzi). Necht' $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i(x,t)} d\mu_d(t) = \widehat{f}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 183. Fourierova transformace je prosté zobrazení.

Důsledek 184. Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, f\widehat{g}, \widehat{f}g \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Věta 185 (Michel Plancherel, 1910). Existuje právě jedna lineární izometrie $F: L_2(\mu_d) \rightarrow L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

VI. Teorie distribucí

Lemma 186. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.

(a) Necht' μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω . Jestliže $\int_{\Omega} \varphi d\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Necht' $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_{\Omega} f\varphi d\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω .

(c) Necht' μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_{\Omega} f\varphi d\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f d\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Lemma 187. Necht' $A, U \subset \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\text{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Pak existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \leq \varphi \leq 1$, $\text{supp } \varphi \subset U$ a $\varphi = 1$ na A .

Důsledek 188. Necht' $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \leq \varphi \leq 1$ a $\varphi = 1$ na U .

1. Slabé derivace

Tvrzení 189. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in C^1((a, b))$. Pak

$$\int_a^b f' \varphi d\lambda = - \int_a^b f \varphi' d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Definice 190. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ je slabou derivací funkce f , jestliže

$$\int_a^b g \varphi d\lambda = - \int_a^b f \varphi' d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$. Řekneme, že borelovská komplexní míra μ na (a, b) je slabou derivací funkce f , jestliže

$$\int_a^b \varphi d\mu = - \int_a^b f \varphi' d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Věta 191. Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ slabou derivací f , pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a, b) slabou derivací f , pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a, b) slabou derivací f , pak $g \in L_1((a, b))$ a $\mu(A) = \int_A g d\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a, b)$.

Tvrzení 192. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$. Pak f má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje $c \in \mathbb{K}$ taková, že $f = c$ s. v. na (a, b)).

Věta 193. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$.

(a) Je-li f absolutně spojitá na $[a, b]$, pak má vlastní derivaci s. v., $f' \in L_1((a, b))$ a f' je slabou derivací f . Obráceně, má-li f slabou derivaci $g \in L_1((a, b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a, b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. Potom je $g = f_0'$ s. v.

Obečněji, f má slabou derivaci v $L_1^{\text{loc}}((a, b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a, b) taková, že $f = f_0$ s. v.

(b) Funkce f má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře μ na (a, b) , právě když existuje funkce f_0 konečné variace na $[a, b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. V tom případě pro každý podinterval $(c, d) \subset (a, b)$ platí $\mu((c, d)) = [f_0]_c^d$.

2. Prostor testovacích funkcí a distribuce

Definice 194. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak definujeme

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}.$$

Věta 195. Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:

(a) Necht' $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\varphi_n \rightarrow \varphi$ v metrice ρ .
- (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \rightarrow 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.
- (iii) Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na \mathbb{R}^d .

(b) Vektorové operace na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (sčítání a násobení skalárem) jsou v ρ spojité.

(c) Je-li α multiindex délky d , pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ je spojité jakožto zobrazení z $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$.

(d) Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ je $(\mathcal{D}(K), \rho)$ úplný metrický prostor.

Definice 196. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že funkcionál $\Phi: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ je spojité, pokud pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $\Phi \upharpoonright_{(\mathcal{D}(K), \rho)}$ spojitá. Spojité lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$ se nazývají distribuce na Ω . Množinu všech distribucí na Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)^*$.

Věta 197. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (i) $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
- (ii) Λ je spojité v 0, tj. pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní a pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{D}(K), \rho)$ konvergující k 0 platí $\Lambda(\varphi_n) \rightarrow 0$.
- (iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

Definice 198. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ . Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

3. Operace s distribucemi

Lemma 199. Necht' $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny derivace až do řádu k omezené a necht' $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Definice 200. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme derivaci D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme součin funkce f a distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

Tvrzení 201. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:

- (a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
- (b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
- (c) Je-li $g \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.
- (d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.

(e) Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$, pak

- $\Lambda'_g = \Lambda_h$, kde $h \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$, právě když h je slabou derivací g ;
- $\Lambda'_g = \Lambda_\mu$, kde μ je borelovská komplexní míra na (a, b) , právě když μ je slabou derivací g .

Fakt 202. Necht' $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak existují konstanty $c_{\beta, \gamma}^\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^d$, $|\beta| + |\gamma| \leq |\alpha|$ takové, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a každé $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ platí

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta| + |\gamma| = |\alpha|}} c_{\beta, \gamma}^\alpha D^\beta f D^\gamma g.$$

Definice 203. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k distribuci $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pokud konverguje bodově, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Tvrzení 204. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak platí:

(a) Jestliže posloupnost $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pak

- $D^\alpha \Lambda_n \rightarrow D^\alpha \Lambda$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,
- $f \Lambda_n \rightarrow f \Lambda$ pro každou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$.

(b) Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0$, pak $\Lambda_{f_n} \rightarrow \Lambda_f$.

(c) Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi_n \rightarrow \varphi$ v $(\mathcal{D}(K), \rho)$, pak $\Lambda_{\varphi_n} \rightarrow \Lambda_\varphi$.

(d) Je-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \rightarrow \Lambda_f$.

Věta 205. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje $\Lambda(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\varphi)$. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Definice 206. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω . Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ , jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Věta 207. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω . Množina $G = \bigcup \{H \subset \Omega; H \text{ je nulová pro } \Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ , tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ , pak $H \subset G$.

Definice 208. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω . Nosič distribuce Λ definujeme jako $\text{supp } \Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ .

Věta 209. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω .

(a) Je-li $f \in C(\Omega)$, pak $\text{supp } \Lambda_f = \text{supp } f$.

(b) Je-li μ borelovská komplexní míra na Ω , pak $\text{supp } \Lambda_\mu = \text{supp } \mu$.

(c) Pokud je $\text{supp } \Lambda$ kompaktní, pak existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Speciálně, Λ je konečného řádu.

(d) $\text{supp } \Lambda = \{z\}$, právě když $\Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α , $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$ ne všechny nulové.