Úvod do funkcionální analýzy

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory
- Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory
- Konvoluce funkcí a Fourierova transformace
- Teorie distribucí

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X*.*

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.

(b) *Norma je* 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* X.

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.

(b) *Norma je* 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* X.

(c) *Zobrazení* $+ \colon X \times X \to X$ *a* $\cdot \colon \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x,r)$, tj.
  $B_X(x,r) = \{y \in X;\ \|x-y\| \leq r\}$.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Definice 3

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.*

(b) *Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.*

Definice 5

Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$.

Definice 5

Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P.
Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \overset{\rho}{\to} x$, právě když $x_n \overset{\sigma}{\to} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$.
Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Definice 5

Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Tvrzení 6

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 9

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 9

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Tvrzení 10

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

(iii) *Zobrazení $Id \colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.*

(iv) *Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.*

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.
Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 12

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.

Definice 13

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu
conv $M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Definice 13

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu
conv $M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 14

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \right.$$
$$\left. \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 15

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Definice 15

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16

Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Definice 17

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Definice 17

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Definice 17

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Tvrzení 19

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.

Věta 20

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Věta 20

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důsledek 21

Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.

Věta 22

(a) *Prostor c_0 je separabilní.*

Věta 22

(a) *Prostor c_0 je separabilní.*

(b) *Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.*

Věta 22

(a) *Prostor c_0 je separabilní.*

(b) *Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.*

(c) *Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.*

Věta 22

(a) *Prostor* c_0 *je separabilní.*

(b) *Prostor* ℓ_∞ *je neseparabilní.*

(c) *Je-li* K *kompaktní metrický prostor, je prostor* $C(K)$ *separabilní.*

(d) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je lebesgueovsky měřitelná a* $1 \leq p < \infty$*. Pak prostor* $L_p(\Omega, \lambda)$ *je separabilní.*

Definice 23

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$.

Definice 23

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definice 23

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Definice 23

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 24

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 25 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Definice 26

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Definice 26

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Definice 26

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem.

Definice 26

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 26

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 27

Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset \colon \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 28

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X. *Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

Věta 28

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X*. Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Věta 28

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X. *Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(c) *Je-li* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$, *pak* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ *pro každou permutaci (tj. bijekci)* $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.

Věta 28

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X*. Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(c) *Je-li* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$*, pak* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ *pro každou permutaci (tj. bijekci)* $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$*.*

(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$*.*

Tvrzení 29

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když

$$\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Věta 30

Nechť X je Banachův prostor.

(a) *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Věta 30

Nechť X je Banachův prostor.

(a) *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(b) *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*

Věta 30

Nechť X je Banachův prostor.

(a) *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(b) *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*

(c) *Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda\subset\Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.*

Tvrzení 31

(a) *Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k x.*

Tvrzení 31

(a) *Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k x.*

(b) *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.*

Tvrzení 31

(a) *Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k x.*

(b) *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.*

(c) *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a obě pak mají stejný součet).*

Důsledek 32

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

Definice 33

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Definice 33

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 34

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje bezpodmínečně.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Věta 35

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

Věta 35

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.
Každá řada v $\mathbb{R}$ *je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 36

Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.

Tvrzení 37

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je spojité.*

(ii) *T je spojité v jednom bodě.*

(iii) *T je spojité v 0.*

(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(v) *T je lipschitzovské.*

(vi) *T je stejnoměrně spojité.*

(vii) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(viii) *$T(B_X)$ je omezená.*

(ix) *$T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 38

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 38

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 38

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf \{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X\}$.

Fakt 39

Nechť X, Y *jsou normované lineární prostory a* $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *je posloupnost operátorů konvergujících k* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *v prostoru* $\mathcal{L}(X, Y)$. *Pak* $\{T_n\}$ *konverguje k* T *bodově, tj. pro každé* $x \in X$ *platí* $T_n(x) \to T(x)$ *v prostoru* Y.

Fakt 39

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.

Fakt 40

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.

Věta 41

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Věta 41

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 42

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Věta 41

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 42

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Věta 43

Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.

Lemma 44

Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.

Definice 45

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;

Definice 45

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na Rng T;

Definice 45

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;

Definice 45

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 46

Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty* $C_1, C_2 > 0$ *takové, že* $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

Tvrzení 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty* $C_1, C_2 > 0$ *takové, že* $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) *Je-li* X *izomorfní s* Y *a* X *je Banachův, je i* Y *Banachův.*

Tvrzení 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

(c) *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y.*

Fakt 48

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

(a) *Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.*

(b) *Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.*

Věta 49

Nechť $X, \widehat{X}$ *a* Y *jsou normované lineární prostory,* X *je hustý v* $\widehat{X}$ *a* Y *je úplný. Nechť dále* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pak existuje právě jeden operátor* $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ *rozšiřující* T*, tj.* $\widehat{T}\restriction_X = T$*. Navíc platí* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$*.*

Lemma 50 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))

Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Věta 51

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *B_X je kompaktní.*

(iv) *Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.*

(v) *Každá lineární forma na X je spojitá.*

(vi) *Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.*

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 52

Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 53

Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y.

Definice 53

Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| =$$
$$= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in\widehat{x}} \|y\| = \inf_{y\in Y} \|x+y\| = \inf_{y\in Y} \|x-y\| =$$
$$= \operatorname{dist}(x+Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Tvrzení 54

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.

Věta 55

Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.

Definice 56

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \mathrm{span}(A \cup B)$.

Definice 56

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Definice 57

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Definice 57

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 58

Nechť X je vektorový prostor.

(a) *Je-li $P\colon X \to X$ lineární projekce, pak $P\restriction_{\mathrm{Rng}\,P} = Id_{\mathrm{Rng}\,P}$.*

Definice 57

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá (lineární) projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 58

Nechť X je vektorový prostor.

(a) *Je-li $P\colon X \to X$ lineární projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.*

(b) *Je-li Y podprostor X a $P\colon X \to Y$ lineární zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.*

Tvrzení 59

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, Rng $P_A = A$, Ker $P_A = B$, Rng $P_B = B$ *a* Ker $P_B = A$.

Tvrzení 59

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, Rng $P_A = A$, Ker $P_A = B$, Rng $P_B = B$ *a* Ker $P_B = A$. *Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A =$* Rng P, $B =$ Ker P *a* $P = P_A$.

Věta 60

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

Věta 60

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.*

Věta 60

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.*

Definice 61

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 62

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$.

Definice 62

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X.

Definice 62

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Definice 62

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 63

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.

(a) *Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

Definice 62

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 63

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.

(a) *Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

(b) *Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.*

Věta 64

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.

6. Hilbertovy prostory

Definice 65

Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x\mapsto\langle x,y\rangle$ je lineární pro každé $y\in X$,

(ii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ pro každé $x,y\in X$,

(iii) $\langle x,x\rangle\geq 0$ pro každé $x\in X$,

(iv) $\langle x,x\rangle=0$ právě tehdy, když $x=0$.

Dvojici $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Definice 65

Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme **prostor se skalárním součinem**.

Tvrzení 66 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ *pro každé* $x, y \in X$.

(ii) *Funkce* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *pro* $x \in X$ *je norma na* X.

Definice 67

Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Tvrzení 68

Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *je prostor se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$*. Pak funkce* $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ *je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Fakt 69

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Fakt 69

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 70 (rovnoběžníkové pravidlo)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Tvrzení 71 (polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Tvrzení 71 (polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

v komplexním případě.

Důsledek 72

Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.

Věta 73

Nechť X, Y *jsou prostory se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$. *Pak na prostoru* $X \oplus_2 Y$ *existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na* X *a* Y, *a který indukuje normu* $\|\cdot\|_2$. *Speciálně, jsou-li* X, Y *Hilbertovy prostory, pak* $X \oplus_2 Y$ *je Hilbertův prostor.*

Definice 74

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$.

Definice 74

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$.

Definice 74

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$.

Definice 74

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^{\perp} = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

Fakt 75 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Lemma 76

Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.

Lemma 76

Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.

Lemma 77

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

Lemma 79 (F. Riesz, 1934)

Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^{\perp}$.

Věta 80 (F. Riesz, 1934)

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^{\perp}$ a projekce $P_Y \colon H \to Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^{\perp}$ má následující vlastnosti:

(i) $\|P_Y(x) - x\| = \mathrm{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ *pro každé* $x \in H$,

(ii) $\|P_Y(x)\| \leq \|x\|$ *pro každé* $x \in H$.

Věta 81

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

Definice 82

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;

Definice 82

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;

Definice 82

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Fakt 83

Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ *pro každé dva prvky* $x, y \in A$, $x \neq y$.

Věta 84

Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

Lemma 85

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$*, kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ *pro každé* $\gamma \in \Gamma$*.*

Lemma 85

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.

Fakt 86

Nechť $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\| \sum_{i \in F} a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.

Lemma 85

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.

Fakt 86

Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\|\sum_{i\in F} a_i e_i\right\|^2 = \sum_{i\in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.

Důsledek 87

Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.

Lemma 88

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \in Y^{\perp}$.

Lemma 88

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y^{\perp}$.

Věta 89 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.

Věta 90

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\mathrm{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Věta 90

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Důsledek 91

Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení* $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ *izometrie H a* $\ell_2(\Gamma)$. *Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru* $\ell_2(\Gamma)$ *pro vhodnou množinu* Γ.

Tvrzení 93

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$*, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 94 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.

Věta 94 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.

Lemma 95

Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

Tvrzení 96

Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f\colon X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

Definice 97

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Definice 97

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 98 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 98 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 99 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Věta 99 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 100

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Věta 99 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 100

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Důsledek 101 (Duální vyjádření normy)

Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

Věta 102 (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \mathrm{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 103

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.*

Věta 103

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.*

(b) *Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.*

Definice 104

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Definice 104

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 105

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

(a) $A^\perp$ *je uzavřený podprostor* X^*,

(b) $B_\perp$ *je uzavřený podprostor* X,

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$,

(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

2. Reprezentace duálů

Tvrzení 106

Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.

Definice 107

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme **sdruženým exponentem** k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 108 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

(a) *Prostor* c_0^* *je lineárně izometrický s prostorem* ℓ_1 *pomocí zobrazení* $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, *kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Věta 108 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

(a) *Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) *Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 109

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Definice 110

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Definice 110

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 111

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$.

Definice 110

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 111

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.

Věta 112 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.

Věta 113 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 113 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma 114

Nechť K je kompaktní prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.

Věta 115

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^{\perp} \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^{\perp}$ na $(X/Y)^*$.

Věta 115

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) *Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem*

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Věta 115

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) *Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem*

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

Definice 116

Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 117

Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 117

Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Tvrzení 118

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}

Tvrzení 119

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak $\dim X^* = \dim X$*, a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

Věta 120

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Věta 120

Pro každý normovaný lineární prostor X *existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že* X *je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem* X *existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že* X *je jeho hustý podprostor.*

Věta 120

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.

Definice 121

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Definice 121

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 122

Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Věta 123

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

Věta 123

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

Věta 123

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

Věta 123

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

(d) *Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.*

Věta 123

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

(d) *Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.*

(e) *Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.*

Příklady 124

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

Příklady 124

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

Příklady 124

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

Příklady 124

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 125 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 125 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 126

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Definice 127

Zobrazení $f: X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Definice 127

Zobrazení $f: X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 128 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Definice 127

Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 128 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Lemma 129 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset \overline{T(U(0, r))}$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.

Důsledek 130 (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pak* T *je izomorfismus* X *na* Y*, právě když* T *je prostý a na.*

Důsledek 130 (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pak* T *je izomorfismus* X *na* Y*, právě když* T *je prostý a na.*

Důsledek 131

Nechť X*,* Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *je na. Pak platí:*

(a) *Existuje* $c > 0$ *takové, že pro každé* $y \in Y$ *existuje* $x \in T^{-1}(y)$ *splňující* $\|x\| \leq c\|y\|$*.*

Důsledek 130 (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.

Důsledek 131

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:

(a) *Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.*

(b) *Zobrazení $\widehat{T} \colon X / \operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X / \operatorname{Ker} T$.*

Definice 132

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f.

Definice 132

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Definice 132

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 133 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.

IV. Lineární operátory

IV. Lineární operátory

Definice 134

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 135 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.)

IV. Lineární operátory

Definice 134

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 135 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 135

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^*f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

Věta 135

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

Věta 135

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^*f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

(c) *Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.*

Věta 136

Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(e) *Jsou-li navíc X, Y Banachovy a* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Tvrzení 137 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tvrzení 137 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y *jsou normované lineární prostory,* $\varepsilon_X \colon X \to X^{**}$ *a* $\varepsilon_Y \colon Y \to Y^{**}$ *jsou kanonická vnoření do druhých duálů a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ *a označíme-li* $\varepsilon \colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, *a* $S \colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, *pak* $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Věta 138

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) T^* *je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v* Y.

Věta 138

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) *Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Věta 138

Nechť X, Y *jsou normované lineární prostory a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) T^* *je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v* Y.

(b) *Je-li* T *izomorfismus na, pak* T^* *je izomorfismus na a platí* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(c) *Je-li* T *izometrie na, pak* T^* *je izometrie na.*

Věta 138

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y.*

(b) *Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(c) *Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.*

Jsou-li X, Y úplné, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

Definice 139

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y.

Definice 139

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Definice 139

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.
Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud Rng T má konečnou dimenzi.

Definice 139

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 140

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je kompaktní.*

(ii) *$T(B_X)$ je relativně kompaktní.*

(iii) *Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.*

Tvrzení 141

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(a) *Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Tvrzení 141

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(a) *Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

(b) *Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Věta 142

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

Věta 142

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Věta 142

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

(c) *Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Věta 142

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$ a $\mathcal{F}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X,Y)$.*

(c) *Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X,Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$.*

(d) *Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.*

Věta 142

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

(c) *Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

(d) *Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.*

(e) *Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.*

Věta 143 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

Tvrzení 144

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.

Definice 145

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$.

Definice 145

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ.

Definice 145

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ.

Definice 145

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Definice 145

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 146

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.

Lemma 147

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.

Lemma 147

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.

Tvrzení 148

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.

Věta 149

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

Tvrzení 150

Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Tvrzení 150

Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$*, pak* $0 \in \sigma(T)$*. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a* $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$*, pak* $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$*.*

Věta 151

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$*. Je-li X Banachův, pak* $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ *je uzavřený.*

Věta 152 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Věta 152 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Důsledek 153

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Lemma 154

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Lemma 154

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Věta 155

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.

Důsledek 156

Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.

Věta 157 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 157 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 158 (Třetí Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) &= \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \\ &= \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.\end{aligned}$$

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Definice 159

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 160

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

Věta 160

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

(b) *Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.*

Věta 160

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

(b) *Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.*

(c) *Nechť $1 \leq p, q, r \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$.*

Lemma 161

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.

(a) *Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.*

Lemma 161

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je lebesgueovsky měřitelná.*

(a) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *je funkce* $y \mapsto f(x-y)$ *lebesgueovsky měřitelná na* $\mathbb{R}^d$*.*

(b) *Funkce* $(x,y) \mapsto f(y)$ *a* $(x,y) \mapsto f(x-y)$ *jsou lebesgueovsky měřitelné na* $(\mathbb{R}^d)^2$*.*

Lemma 161

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je lebesgueovsky měřitelná.*

(a) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *je funkce* $y \mapsto f(x-y)$ *lebesgueovsky měřitelná na* $\mathbb{R}^d$*.*

(b) *Funkce* $(x,y) \mapsto f(y)$ *a* $(x,y) \mapsto f(x-y)$ *jsou lebesgueovsky měřitelné na* $(\mathbb{R}^d)^2$*.*

Lemma 162

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f,g \in L_1(\mu)$*. Položíme-li* $F(x,y) = f(y)g(x-y)$ *pro* $x,y \in \mathbb{R}^d$*, pak* $F \in L_1(\mu \times \mu)$ *a* $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$*.*

Definice 163

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Definice 163

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 164

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau\colon \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.

Věta 165

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Věta 165

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.*

Věta 165

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.*

(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*

Věta 165

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*

(d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Věta 165

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*

(d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

(e) *Nechť $1 \leq p, q \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.*

Definice 166

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme **multiindexem** délky d.

Definice 166

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Definice 166

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.
Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme).
Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$.
Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 167

Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) =$$
$$= \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Věta 168

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$*. Je-li* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ *a* $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$*, pak* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *a* $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ *pro každý multiindex* α *délky* d*.*

Definice 169

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Definice 169

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 170

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

Definice 169

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 170

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \le p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.*

Důsledek 171

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 172

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 173

Prostorem $C_b(\mathbb{R}^d) = C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 173

Prostorem $C_b(\mathbb{R}^d) = C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 174

Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 175 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903))

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak $\lim\limits_{\|t\|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$

Věta 176

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ *a* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Věta 176

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) *Nechť* $y \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$ *a naopak pro funkci* $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle} f(x)$ *platí* $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

Věta 176

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:

(a) *$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.*

(b) *Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle} f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.*

(c) *Je-li $c > 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = c^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.*

Věta 176

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \ldots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$*. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$*.*

(b) *Nechť* $y \in \mathbb{R}^d$*. Pak* $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$ *a naopak pro funkci* $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle} f(x)$ *platí* $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$*.*

(c) *Je-li* $c > 0$ *a* $h(x) = f(\frac{x}{c})$*, pak* $\widehat{h}(t) = c^d \widehat{f}(ct)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$*.*

(d) *Je-li* $h(x) = \overline{f(-x)}$*, pak* $\widehat{h} = \overline{\widehat{f}}$*.*

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_jf(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_jf(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \, \mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g} \, \mathrm{d}\mu_d$.

Lemma 177

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1([a, +\infty))$*. Předpokládejme dále, že* f *je absolutně spojitá na každém intervalu* $[a, b]$*,* $b > a$*, nebo že* f' *existuje vlastní na celém* $[a, +\infty)$*. Je-li* $f' \in L_1([a, +\infty))$*, pak* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$*.*

Lemma 177

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1([a, +\infty))$. *Předpokládejme dále, že* f *je absolutně spojitá na každém intervalu* $[a, b]$, $b > a$, *nebo že* f' *existuje vlastní na celém* $[a, +\infty)$. *Je-li* $f' \in L_1([a, +\infty))$, *pak* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Lemma 178

Nechť $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g *mají (vlastní) derivaci v každém bodě* $\mathbb{R}$ *a platí* $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g *je omezená a* g' *je spojitá a omezená. Pak* $\int_{\mathbb{R}} f' g \, \mathrm{d}\lambda = - \int_{\mathbb{R}} f g' \, \mathrm{d}\lambda$.

Lemma 179

Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je omezená a* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *a* $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ *existují všude na* $\mathbb{R}^d$ *a jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ *a* $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, *pak* $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda$.

Příklad 180

Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^{d}|x_j|}$.
Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Lemma 181

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. *Položme* $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ *a* $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t) \, \mathrm{d}\mu_d(t)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$.

Věta 182 (o inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 182 (o inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 183

Fourierova transformace je prosté zobrazení.

Věta 182 (o inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 183

Fourierova transformace je prosté zobrazení.

Důsledek 184

Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Věta 185 (Michel Plancherel, 1910)

Existuje právě jedna lineární izometrie $F\colon L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ *na taková, že* $F(f) = \widehat{f}$ *pro každou* $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

VI. Teorie distribucí

Lemma 186

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená.*

(a) *Nechť* μ *je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na* Ω*. Jestliže* $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ *pro každou nezápornou* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$*, pak* $\mu = 0$*.*

Lemma 186

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená.*

(a) *Nechť* μ *je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na* Ω. *Jestliže* $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ *pro každou nezápornou* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, *pak* $\mu = 0$.

(b) *Nechť* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. *Jestliže* $\int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda = 0$ *pro každou nezápornou* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, *pak* $f = 0$ *s. v. na* Ω.

VI. Teorie distribucí

Lemma 186

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.

(a) *Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω. Jestliže $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.*

(b) *Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω.*

(c) *Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.*

Lemma 187

Nechť $A, U \subset \mathbb{R}^d$ *jsou takové, že* $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. *Pak existuje* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *taková, že* $0 \leq \varphi \leq 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ *a* $\varphi = 1$ *na* A.

Lemma 187

Nechť $A, U \subset \mathbb{R}^d$ *jsou takové, že* $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. *Pak existuje* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *taková, že* $0 \leq \varphi \leq 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ *a* $\varphi = 1$ *na* A.

Důsledek 188

Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ *je kompaktní a* $G \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* $G \supset K$. *Pak existují* $U \subset G$ *otevřená,* $U \supset K$ *a* $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ *taková, že* $0 \leq \varphi \leq 1$ *a* $\varphi = 1$ *na* U.

Tvrzení 189

Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in C^1((a,b))$*. Pak*

$$\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$*.*

Definice 190

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$ je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Definice 190

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$ je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$. Řekneme, že borelovská komplexní míra μ na (a, b) je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\mu = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Věta 191

Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ *je určena jednoznačně.*

Věta 191

Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ slabou derivací f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a,b) slabou derivací f, pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a,b) slabou derivací f, pak $g \in L_1((a,b))$ a $\mu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a,b)$.

Tvrzení 192

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$. *Pak* f *má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje* $c \in \mathbb{K}$ *taková, že* $f = c$ *s. v. na* (a, b)*).*

Věta 193

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$*.*

(a) *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a, b]$*, pak má vlastní derivaci s. v.,* $f' \in L_1((a, b))$ *a* f' *je slabou derivací* f*.*

Věta 193

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$*.*

(a) *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a, b]$*, pak má vlastní derivaci s. v.,* $f' \in L_1((a, b))$ *a* f' *je slabou derivací* f*. Obráceně, má-li* f *slabou derivaci* $g \in L_1((a, b))$*, pak existuje funkce* f_0 *absolutně spojitá na* $[a, b]$ *taková, že* $f = f_0$ *s. v. Potom je* $g = f_0'$ *s. v.*

Věta 193

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$.

(a) *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a, b]$, *pak má vlastní derivaci s. v.,* $f' \in L_1((a, b))$ *a* f' *je slabou derivací* f.
Obráceně, má-li f *slabou derivaci* $g \in L_1((a, b))$, *pak existuje funkce* f_0 *absolutně spojitá na* $[a, b]$ *taková, že* $f = f_0$ *s. v. Potom je* $g = f_0'$ *s. v.*
Obecněji, f *má slabou derivaci v* $L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, *právě když existuje funkce* f_0 *lokálně absolutně spojitá na* (a, b) *taková, že* $f = f_0$ *s. v.*

Věta 193

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$.

(a) *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a, b]$, *pak má vlastní derivaci s. v.,* $f' \in L_1((a, b))$ *a* f' *je slabou derivací* f. *Obráceně, má-li* f *slabou derivaci* $g \in L_1((a, b))$, *pak existuje funkce* f_0 *absolutně spojitá na* $[a, b]$ *taková, že* $f = f_0$ *s. v. Potom je* $g = f_0'$ *s. v.* *Obecněji,* f *má slabou derivaci v* $L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, *právě když existuje funkce* f_0 *lokálně absolutně spojitá na* (a, b) *taková, že* $f = f_0$ *s. v.*

(b) *Funkce* f *má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře* μ *na* (a, b), *právě když existuje funkce* f_0 *konečné variace na* $[a, b]$ *taková, že* $f = f_0$ *s. v. V tom případě pro každý podinterval* $(c, d) \subset (a, b)$ *platí* $\mu((c, d)) = [f_0]_c^d$.

Definice 194

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Definice 194

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak definujeme

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}.$$

Věta 195

Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   - (i) $\varphi_n \to \varphi$ *v metrice* ρ.
   - (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ *pro každé* $N \in \mathbb{N}_0$.
   - (iii) *Pro každý multiindex α délky d platí, že* $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.

Věta 195

Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

  (i) $\varphi_n \to \varphi$ *v metrice ρ.*

  (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ *pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.*

  (iii) *Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Vektorové operace na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (sčítání a násobení skalárem) jsou v ρ spojité.*

Věta 195

Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   (i) *$\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.*
   (ii) *$\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.*
   (iii) *Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Vektorové operace na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (sčítání a násobení skalárem) jsou v ρ spojité.*

(c) *Je-li α multiindex délky d, pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ je spojité jakožto zobrazení z $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$.*

Věta 195

Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   - (i) $\varphi_n \to \varphi$ *v metrice* ρ.
   - (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ *pro každé* $N \in \mathbb{N}_0$.
   - (iii) *Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Vektorové operace na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (sčítání a násobení skalárem) jsou v ρ spojité.*

(c) *Je-li α multiindex délky d, pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ je spojité jakožto zobrazení z $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$.*

(d) *Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ je $(\mathcal{D}(K), \rho)$ úplný metrický prostor.*

Definice 196

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že funkcionál $\Phi\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je spojitý, pokud pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $\Phi\restriction_{(\mathcal{D}(K),\rho)}$ spojitá.

Definice 196

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že funkcionál $\Phi\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je spojitý, pokud pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $\Phi\restriction_{(\mathcal{D}(K),\rho)}$ spojitá. Spojité lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$ se nazývají distribuce na Ω. Množinu všech distribucí na Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)^*$.

Věta 197

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* $\Lambda\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ *je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(ii) Λ *je spojitý v* 0, *tj. pro každou* $K \subset \Omega$ *kompaktní a pro každou posloupnost* $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{D}(K), \rho)$ *konvergující k* 0 *platí* $\Lambda(\varphi_n) \to 0$.

(iii) *Pro každou kompaktní* $K \subset \Omega$ *existují* $N \in \mathbb{N}_0$ *a* $C \geq 0$ *taková, že* $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ *pro každou* $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

Definice 198

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ.

Definice 198

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

Lemma 199

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny derivace až do řádu k omezené a nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, \mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Definice 200

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme derivaci D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Definice 200

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme derivaci D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme součin funkce f a distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

Tvrzení 201

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *a* $f \in C^\infty(\Omega)$. *Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Tvrzení 201

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *a* $f \in C^\infty(\Omega)$. *Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Tvrzení 201

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *a* $f \in C^\infty(\Omega)$. *Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(c) *Je-li* $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *pak* $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.

Tvrzení 201

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *a* $f \in C^\infty(\Omega)$. *Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(c) *Je-li* $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *pak* $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.

(d) *Je-li* $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, *pak* $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.

Tvrzení 201

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(c) *Je-li* $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *pak* $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.

(d) *Je-li* $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, *pak* $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.

(e) *Je-li* $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ *a* $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, *pak*
- $\Lambda_g' = \Lambda_h$, *kde* $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, *právě když* h *je slabou derivací* g;
- $\Lambda_g' = \Lambda_\mu$, *kde* μ *je borelovská komplexní míra na* (a, b), *právě když* μ *je slabou derivací* g.

Fakt 202

Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$*. Pak existují konstanty* $c^{\alpha}_{\beta,\gamma} \in \mathbb{N}$*,* $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^d$*,* $|\beta| + |\gamma| \leq |\alpha|$ *takové, že pro každou otevřenou* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *a každé* $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ *platí*

$$D^{\alpha}(fg) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^{\alpha}_{\beta,\gamma} D^{\beta} f D^{\gamma} g.$$

Definice 203

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k distribuci $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pokud konverguje bodově, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Tvrzení 204

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená. Pak platí:*

(a) *Jestliže posloupnost* $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ *konverguje k* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, *pak*

- $D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$ *pro každý multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,
- $f\Lambda_n \to f\Lambda$ *pro každou funkci* $f \in C^\infty(\Omega)$.

Tvrzení 204

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená. Pak platí:*

(a) *Jestliže posloupnost* $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ *konverguje k* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, *pak*

- $D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$ *pro každý multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,
- $f\Lambda_n \to f\Lambda$ *pro každou funkci* $f \in C^\infty(\Omega)$.

(b) *Jsou-li* $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *a jestliže pro každou kompaktní* $K \subset \Omega$ *platí* $\int_K |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, *pak* $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

Tvrzení 204

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená. Pak platí:*

(a) *Jestliže posloupnost* $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ *konverguje k* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$*, pak*
- $D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$ *pro každý multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$*,*
- $f\Lambda_n \to f\Lambda$ *pro každou funkci* $f \in C^\infty(\Omega)$*.*

(b) *Jsou-li* $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *a jestliže pro každou kompaktní* $K \subset \Omega$ *platí* $\int_K |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$*, pak* $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$*.*

(c) *Je-li* $K \subset \Omega$ *kompaktní a* $\varphi_n \to \varphi$ *v* $(\mathcal{D}(K), \rho)$*, pak* $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$*.*

Tvrzení 204

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak platí:

(a) *Jestliže posloupnost $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pak*
- $D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$ *pro každý multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,
- $f\Lambda_n \to f\Lambda$ *pro každou funkci* $f \in C^\infty(\Omega)$.

(b) *Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.*

(c) *Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi_n \to \varphi$ v $(\mathcal{D}(K), \rho)$, pak $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$.*

(d) *Je-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n \to f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.*

Věta 205

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* $\{\Lambda_n\}$ *je posloupnost v* $\mathcal{D}(\Omega)^*$ *taková, že pro každé* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *existuje* $\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$. *Pak* $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Definice 206

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je **nulová** pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Definice 206

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Věta 207

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Množina $G = \bigcup\{H \subset \Omega;\ H \text{ je nulová pro } \Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ, tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ, pak $H \subset G$.

Definice 206

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Věta 207

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Množina $G = \bigcup\{H \subset \Omega;\ H \text{ je nulová pro } \Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ, tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ, pak $H \subset G$.

Definice 208

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Nosič distribuce Λ definujeme jako $\operatorname{supp} \Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ.

Věta 209

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* Λ *je distribuce na* Ω*.*

(a) *Je-li* $f \in C(\Omega)$*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_f = \operatorname{supp} f$*.*

Věta 209

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* Λ *je distribuce na* Ω*.*

(a) *Je-li* $f \in C(\Omega)$*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_f = \operatorname{supp} f$*.*

(b) *Je-li* μ *borelovská komplexní míra na* Ω*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_\mu = \operatorname{supp} \mu$*.*

Věta 209

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* Λ *je distribuce na* Ω*.*

(a) *Je-li* $f \in C(\Omega)$*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_f = \operatorname{supp} f$*.*

(b) *Je-li* μ *borelovská komplexní míra na* Ω*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_\mu = \operatorname{supp} \mu$*.*

(c) *Pokud je* $\operatorname{supp} \Lambda$ *kompaktní, pak existují* $N \in \mathbb{N}_0$ *a* $C \geq 0$ *taková, že* $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ *pro každou* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Speciálně,* Λ *je konečného řádu.*

Věta 209

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* Λ *je distribuce na* Ω*.*

(a) *Je-li* $f \in C(\Omega)$*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_f = \operatorname{supp} f$*.*

(b) *Je-li* μ *borelovská komplexní míra na* Ω*, pak* $\operatorname{supp} \Lambda_\mu = \operatorname{supp} \mu$*.*

(c) *Pokud je* $\operatorname{supp} \Lambda$ *kompaktní, pak existují* $N \in \mathbb{N}_0$ *a* $C \geq 0$ *taková, že* $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ *pro každou* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Speciálně,* Λ *je konečného řádu.*

(d) $\operatorname{supp} \Lambda = \{z\}$*, právě když* $\Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ *pro nějaké* $N \in \mathbb{N}_0$ *a konstanty* c_α*,* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$*,* $|\alpha| \leq N$ *ne všechny nulové.*