

I. Topologické vektorové prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a τ je topologie na X . Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$, nazveme dvojici (X, τ) *topologickým vektorovým prostorem*.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Fakt 2. Necht' X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X . Pak

(a) operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení $+: (X, \rho) \times (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$;

(b) $\rho(nx, 0) \leq n\rho(x, 0)$ pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 3. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} .

(a) Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X .

(b) Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.

(c) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřené takové, že $V + V \subset U$.

Definice 4. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- *pohlcující*, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- *vyvážená*, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Tvrzení 5. Necht' X je topologický vektorový prostor.

(a) Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.

(b) $\tau(0)$ má bázi z otevřených vyvážených množin.

Věta 6 (John von Neumann (1935)). Necht' X je vektorový prostor a \mathcal{U} je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že \mathcal{U} má následující vlastnosti:

- Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.
- Každá množina z \mathcal{U} je pohlcující.
- Každá množina z \mathcal{U} je vyvážená.

Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a \mathcal{U} je báze okolí 0.

Věta 7. Necht' X je topologický vektorový prostor.

(a) Necht' $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K . Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

(b) X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).

(c) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- X je Hausdorffův.
- X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).
- $\{0\}$ je uzavřená množina.
- $\{0\} = \bigcap \{U; U \in \tau(0)\}$.

Tvrzení 8. Necht' X je topologický vektorový prostor.

(a) Je-li $G \subset X$ otevřené a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.

(b) Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.

(c) Jsou-li $K, L \subset X$ kompaktní, je i $K + L$ kompaktní.

Tvrzení 9. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap \{A + U; U \in \tau(0)\}$.

- (b) $\overline{A + B} \subset \overline{A} + \overline{B}$ a $\text{Int } A + \text{Int } B \subset \text{Int}(A + B)$.
- (c) $\lambda \overline{A} = \overline{\lambda A}$ a $\lambda \text{Int } A = \text{Int}(\lambda A)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- (d) Je-li Y podprostor X , pak \overline{Y} je též podprostor X .
- (e) Je-li A konvexní, pak \overline{A} a $\text{Int } A$ jsou konvexní.
- (f) Je-li A vyvážená, pak \overline{A} je vyvážená.
- (g) Je-li A vyvážená a $0 \in \text{Int } A$, pak $\text{Int } A$ je vyvážená.

Věta 10. Necht' X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.

Důsledek 11. Necht' X je Hausdorffův topologický vektorový prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X .

2. Omezené množiny, metrízovatelnost

Definice 12. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Tvrzení 13. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) Množina A je omezená.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \rightarrow 0$ platí $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.
- (iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n} x_n \rightarrow 0$.

Tvrzení 14. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.
- (b) Množina λA omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (c) Množina \overline{A} je omezená.

Lemma 15. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} , $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \rightarrow 0$. Pak $\{\delta_n V; n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.

Věta 16. Necht' X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) X má spočetnou bázi okolí 0.
- (ii) X je pseudometrízovatelný.
- (iii) X je pseudometrízovatelný translačně invariantní pseudometrikou.

Je-li X Hausdorffův, pak lze výše předponu pseudo- vynechat.

Definice 17. Necht' X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je lokálně omezený, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x .

Věta 18. Necht' X je lokálně omezený topologický vektorový prostor. Pak X je pseudometrízovatelný.

3. Totální omezenost a kompaktnost

Definice 19. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá totálně omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

Tvrzení 20. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.
- (b) Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.
- (c) Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.
- (d) Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.
- (e) Je-li A totálně omezená, pak je i \overline{A} totálně omezený.

Tvrzení 21. Necht' X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.

Fakt 22. Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor pseudometrizabletný translačně invariantní pseudometrikou ρ . Pak $A \subset X$ je τ -totálně omezená, právě když je ρ -totálně omezená.

Definice 23. Necht' (X, τ_X) , (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f: X \rightarrow Y$. Řekneme, že f je *stejněměrně spojitý*, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Tvrzení 24. Necht' (X, τ_X) , (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f: X \rightarrow Y$ je *stejněměrně spojitý*. Je-li $A \subset X$ totálně omezená, je i $f(A)$ totálně omezená.

4. Lineární zobrazení

Lineárním obrazem vyvážené množiny je opět vyvážená množina.

Věta 25. Necht' X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme násl. tvrzení:

- (i) T je omezené na nějakém okolí 0.
- (ii) T je spojitý v 0.
- (iii) T je spojitý.
- (iv) T je *stejněměrně spojitý*.
- (v) T je *sekvenciálně spojitý*.
- (vi) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
- (vii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \rightarrow 0$ je množina $\{T(x_n); n \in \mathbb{N}\}$ omezená.

Pak (i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Leftrightarrow (vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X pseudometrizabletný, pak (ii)–(vii) jsou ekvivalentní.

Lemma 26. Necht' X je pseudometrizabletný topologický vektorový prostor. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \rightarrow +\infty$ a $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.

Věta 27. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} a $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) f je spojitý.
- (ii) $\text{Ker } f$ je uzavřený.
- (iii) $\overline{\text{Ker } f} \neq X$.

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) *funkcionály*.

Definice 28. Necht' X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^\#$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat *algebraickým duálem*. Symbolem X^* budeme značit podprostor $X^\#$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojitý na X , a budeme jej nazývat *topologickým duálem* (či jenom *duálem*).

Definice 29. Necht' X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární. Říkáme, že T je *izomorfismus* X na Y (nebo jen *izomorfismus*), pokud T je homeomorfismus X na Y ; říkáme, že T je *izomorfismus* X do Y (nebo jen *izomorfismus* do), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$.

Fakt 30. Necht' X je vektorový prostor, Y je topologický vektorový prostor, a $\{T_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je net lineárních zobrazení z X do Y . Je-li $T: X \rightarrow Y$ bodovou limitou netu $\{T_\gamma\}$, pak T je lineární.

5. Konečněrozměrné prostory

Věta 31. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) X je Hausdorffův a $\dim X < \infty$.
- (ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
- (iii) X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí 0.
- (iv) X je pseudometrizabletný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojitý.
- (v) X je pseudometrizabletný a každá lineární forma na X je spojitý.

Důsledek 32. Necht' X je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak na X existuje jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie.

6. Lokálně konvexní prostory

Fakt 33. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} , $A, B \subset X$ jsou konvexní a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak množiny αA a $A + B$ jsou konvexní.

Definice 34. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Množina $A \subset X$ se nazývá *absolutně konvexní*, pokud je konvexní a vyvážená.

Fakt 35. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) Je-li A vyvážená, je $\text{conv } A$ vyvážená, a tedy absolutně konvexní.

(b) A je absolutně konvexní, právě když pro každé $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ platí $\alpha x + \beta y \in A$.

Fakt 36. Necht' X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X . Pak platí následující tvrzení:

(a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ pro všechna $x, y \in X$.

(b) Množina $Z = p^{-1}(0)$ je podprostor X . Pro libovolná $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, je $p(x) = p(y)$.

(c) Množiny $\{x \in X; p(x) < c\}$ a $\{x \in X; p(x) \leq c\}$ jsou absolutně konvexní pro každé $c \in [0, +\infty)$.

Definice 37. Necht' X je vektorový prostor a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *nezáporně homogenní*, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geq 0$.

Fakt 38. Necht' X je vektorový prostor a f je *nezáporně homogenní* funkce na X . Označme $F_c = \{x \in X; f(x) \leq c\}$ a $G_c = \{x \in X; f(x) < c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $c > 0$ jsou množiny F_c a G_c *pohlcující* a navíc $F_c = cF_1$, $G_c = cG_1$.

Definice 39. Necht' X je vektorový prostor a $A \subset X$ je *pohlcující*. *Minkowského funkcionál* množiny A je funkce $\mu_A: X \rightarrow [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf \{\lambda > 0; x \in \lambda A\}.$$

Věta 40. Necht' X je vektorový prostor a $A \subset X$ je *pohlcující*. Pak platí následující tvrzení:

(a) Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.

(b) μ_A je *nezáporně homogenní*.

(c) Je-li A konvexní, je μ_A *nezáporný sublineární funkcionál*.

(d) Je-li A absolutně konvexní, je μ_A *pseudonorma*.

(e) $A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\}$.

(f) Je-li A vyvážená nebo konvexní, pak $\{x \in X; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\}$.

(g) Je-li $p: X \rightarrow [0, +\infty)$ *nezáporně homogenní*, pak pro každou $B \subset X$ takovou, že $\{x \in X; p(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X; p(x) \leq 1\}$, je $\mu_B = p$.

Tvrzení 41. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je *pohlcující*. Pak $\text{Int } A \subset \{x \in X; \mu_A(x) < 1\}$. Je-li navíc A vyvážená nebo konvexní, pak

$$\text{Int } A \subset \{x \in X; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\} \subset \bar{A}.$$

Lemma 42. Necht' X je topologický vektorový prostor a p je *sublineární funkcionál* na X . Pak p je *stejněměrně spojitý*, právě když je shora omezený na nějakém okolí 0.

Důsledek 43. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je *pohlcující konvexní množina*. Pak μ_A je *spojitý*, právě když A je *okolím* 0. V tom případě pak platí, že

$$\text{Int } A = \{x \in X; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\} = \bar{A}.$$

Věta 44. Necht' X je topologický vektorový prostor. Pak $X^* \neq \{0\}$, právě když v X existuje *konvexní okolí* 0 různé od X .

Definice 45.

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je *lokálně konvexní*, pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.
- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná *translačně invariantní úplnou metrikou*, nazveme *Fréchetův*.
- Dále řekneme, že topologický vektorový prostor je *normovatelný*, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Tvrzení 46. Necht' X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.

Důsledek 47. V lokálně konvexním prostoru má $\tau(0)$ bázi sestávající z otevřených absolutně konvexních pohlcujících množin.

Necht' X je vektorový prostor, p_1, \dots, p_n jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1, \dots, p_n, \varepsilon} = \{x \in X; p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}.$$

Věta 48. Necht' X je vektorový prostor a \mathcal{P} je systém pseudonorem na X . Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p, \varepsilon}; p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1, \dots, p_n, \varepsilon}; n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:

- (a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ -spojitá.
- (b) Množina $A \subset X$ je τ -omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.
- (c) Net $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \rightarrow 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.

Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem \mathcal{P} .

Na druhou stranu, je-li (X, τ) lokálně konvexní prostor a \mathcal{V} je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V; V \in \mathcal{V}\}$.

Tvrzení 49. Necht' (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) X je Hausdorffův.
- (ii) Každý systém pseudonorem \mathcal{P} generující τ má následující vlastnost:
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x) > 0$.
- (iii) Existuje systém pseudonorem \mathcal{P} generující τ s vlastností z tvrzení (ii).

Lemma 50. Necht' (X, τ) je lokálně konvexní prostor generovaný spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$. Pak

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x - y), 1\}$$

je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ .

Věta 51 (A. N. Kolmogorov (1934)). Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak X je pseudonormovatelný (resp. normovatelný, je-li X Hausdorffův) právě tehdy, když v něm existuje omezené konvexní okolí 0.

Tvrzení 52. Necht' X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li A omezená, je i množina $\text{conv } A$ omezená.
- (b) Je-li A totálně omezená, je i množina $\text{conv } A$ totálně omezená.

7. Oddělovací věty

Lemma 53. Necht' X je topologický vektorový prostor a $f \in X^* \setminus \{0\}$. Pak f je otevřené zobrazení.

Věta 54. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\text{Re } f(x) < \inf_B \text{Re } f$ pro každé $x \in A$.
- (b) Je-li X lokálně konvexní, A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \text{Re } f < \inf_B \text{Re } f$. Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce $\sup_A |f| < \inf_B \text{Re } f$.

Důsledek 55. Necht' X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X .
- (b) Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \notin Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = 1$.
- (c) Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F|_Y = f$.

8. Slabé topologie a poláry

Slabé topologie

Lemma 56. Necht' X je vektorový prostor a f, f_1, \dots, f_n jsou lineární formy na X . Pak $f \in \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, právě když $\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } f_j \subset \text{Ker } f$.

Fakt 57. Necht' X, Y, Z jsou vektorové prostory a $L: X \rightarrow Y$ a $S: X \rightarrow Z$ jsou lineární zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $T: Z \rightarrow Y$ takové, že $L = T \circ S$, právě když $\text{Ker } S \subset \text{Ker } L$.

Definice 58. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|; f \in M\}$.

Tvrzení 59. Necht' X je vektorový prostor a $M, N \subset X^\#$. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když $\text{span } M = \text{span } N$. Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \text{span } M)$.

Tvrzení 60. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body X .

Věta 61. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \text{span } M$.

Definice 62. Necht' X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá *slabou topologií* (též w -topologií) na X .
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá *slabou s hvězdičkou topologií* (též w^* -topologií) na X^* .

Důsledek 63. Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:

(a) $w \subset \tau$ a $(X, w)^* = X^*$.

(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

Tvrzení 64. Necht' X je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X . Označme w_{XY} restrikcí topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y . Pak $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$. Je-li X lokálně konvexní, pak $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$. Jinými slovy, v lokálně konvexním prostoru X splývá originální slabá topologie na Y se slabou topologií zděděnou z X .

Věta 65. Necht' X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A}^w = \bar{A}$.

(b) A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.

(c) Je-li X pseudometrizovatelný a $x_n \rightarrow x$ slabě, pak existují $y_n \in \text{conv}\{x_j; j \geq n\}$ takové, že $y_n \rightarrow x$.

Věta 66. Necht' X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.

Věta 67. Necht' X, Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení. Pak T je w - w spojitě, tj. spojitě jakožto zobrazení $T: (X, w) \rightarrow (Y, w)$.

Tvrzení 68. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když $\text{span } M$ má spočetnou algebraickou bázi.

Tvrzení 69. Necht' X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.

Důsledek 70.

(a) Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak (X, w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.

(b) Necht' X je Fréchetův prostor. Pak (X^*, w^*) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný.

Poláry

Definice 71. Necht' X je vektorový prostor a $A \subset X$. *Absolutně konvexní obal* množiny A definujeme jako

$$\text{aconv } A = \bigcap \{B \supset A; B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Tvrzení 72. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a $A \subset X$. Pak

$$\text{aconv } A = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 73. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme *uzavřený absolutně konvexní obal* A jako

$$\overline{\text{aconv}} A = \bigcap \{B \supset A; B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}.$$

Tvrzení 74. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} A = \overline{\text{span}} A$, $\overline{\text{conv}} A = \overline{\text{conv}} A$ a $\overline{\text{aconv}} A = \overline{\text{aconv}} A$.

Definice 75. Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (*absolutní*) *poláru* množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*; |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme *zpětnou (absolutní) poláru* jako

$$B_\circ = \{x \in X; |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Fakt 76. Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Uvažujeme-li na X^* topologii w^* , pak $A^\circ = \varepsilon(A)_\circ$, $\varepsilon(B_\circ) = B^\circ$ a $(B^\circ)_\circ = (B_\circ)^\circ$.

Tvrzení 77. Necht' X je topologický vektorový prostor nad \mathbb{K} , $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Množina A° je absolutně konvexní a w^* -uzavřená. Množina B_\circ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.
- (b) Je-li A podprostor X , pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^* , pak $B_\circ = B_\perp$.
- (c) $\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X , pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.
- (d) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda} B_\circ$.
- (e) Je-li $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^\circ = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$. Je-li $B_\gamma \subset X^*$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right)_\circ = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (B_\gamma)_\circ$.

Věta 78 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950)). Necht' X je topologický vektorový prostor.

- (a) Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\text{aconv}}^w A (= \overline{\text{aconv}} A, \text{ pokud } X \text{ je lokálně konvexní})$.
- (b) Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\text{aconv}}^{w^*} B$.

Lemma 79. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

- (a) A^\perp je w^* -uzavřený podprostor X^* ,
- (b) B_\perp je slabě uzavřený podprostor X ,
- (c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}}^w A (= \overline{\text{span}} A, \text{ pokud } X \text{ je lokálně konvexní})$,
- (d) $(B_\perp)^\perp = \overline{\text{span}}^{w^*} B$.

Věta 80. Jsou-li X, Y topologické vektorové prostory takové, že Y^* odděluje body Y , a $T: X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení, pak platí, že

- (a) $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,
- (b) $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)_\perp$,
- (c) $\overline{\text{Rng } T}^w = (\text{Ker } T^*)_\perp$,
- (d) $\overline{\text{Rng } T^*}^{w^*} = (\text{Ker } T)^\perp$.

Věta 81 (Herman Heine Goldstine (1938)). *Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

Věta 82 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Necht' X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí 0 v X , pak U° je w^* -kompaktní množina.*

Důsledek 83. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak B_{X^*} je w^* -kompaktní.*

Tvrzení 84. *Necht' X je separabilní topologický vektorový prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá v X . Je-li $U \subset X$ okolí 0 , pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizable metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f - g)(x_n)|, 1\}.$$

Fakt 85. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$. Speciálně, ε je homeomorfismem topologických prostorů (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$.*

Tvrzení 86. *Necht' X je normovaný lineární prostor.*

(a) *Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X , pak (B_{X^*}, w^*) je metrizable metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - g)(x_n)|.$$

(b) *Je-li X^* separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*} , pak (B_X, w) je metrizable metrikou*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x - y)|.$$

Věta 87. *Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.*

Důsledek 88. *Necht' X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když slabá a w^* topologie na X^* splývají.*

Věta 89. *Necht' X je reflexivní Banachův prostor. Pak B_X je slabě sekvenciálně kompaktní. Tedy z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

II. Distribuce II

1. Prostor distribucí

Věta 90. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme*

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{D}(\Omega); U \text{ absolutně konvexní, } U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompaktní } K \subset \Omega\}.$$

Pak \mathcal{U} je báze okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

- $\tau_\rho \upharpoonright_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.*
- Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau \upharpoonright_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.*
- Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.*
- Necht' $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \rightarrow \varphi$ v τ , právě když existuje kompaktní $K \subset \Omega$ takový, že $\text{supp } \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na \mathbb{R}^d .*
- $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ je první kategorie v sobě.*

Tvrzení 91. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, Y je lokálně konvexní prostor a $T: (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \rightarrow Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- T je spojitě.*
- Pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergující k 0 v τ je množina $\{T(\varphi_n); n \in \mathbb{N}\}$ omezená.*
- Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $T \upharpoonright_{\mathcal{D}(K)}$ spojitá.*

2. Schwartzův prostor

Lemma 92. Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ polynom na \mathbb{R}^d . Pro každý polynom P na \mathbb{R}^d existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Definice 93. Schwartzův prostor na \mathbb{R}^d je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}); PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\}.$$

Lemma 94. Necht' $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mu_d)$.

Tvrzení 95. Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

- (a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p \in [1, \infty)} L_p(\mu_d)$.
- (b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax + b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.
- (c) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d , pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.
- (d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.
- (e) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $P: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ polynom, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \|x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x)\|_\infty.$$

Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na \mathcal{S}_d generovanou systémem $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ . Tato topologie je metrizable metrikou z Lemmatu 50.

Věta 96. Metrika z Lemmatu 50 příslušná systému $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ je úplná. Prostor (\mathcal{S}_d, σ) je tedy Fréchetův prostor. Topologie σ má následující vlastnosti:

- (a) Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost v \mathcal{S}_d a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
 - (i) $f_n \rightarrow f$ v topologii σ .
 - (ii) Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \rightarrow (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na \mathbb{R}^d .
 - (iii) Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \rightarrow PD^\alpha f$ stejnoměrně na \mathbb{R}^d .
- (b) Jestliže $f_n \rightarrow f$ v prostoru (\mathcal{S}_d, σ) , pak $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.
- (c) Je-li α multiindex délky d , P polynom na \mathbb{R}^d a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z (\mathcal{S}_d, σ) do (\mathcal{S}_d, σ) .

Tvrzení 97. Necht' $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Věta 98. Fourierova transformace je izomorfismem prostoru (\mathcal{S}_d, σ) na sebe. Navíc pro $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad \text{a} \quad \widehat{\widehat{\widehat{f}}} = f.$$

3. Temperované distribuce

Lemma 99. Necht' $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma \upharpoonright_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

Tvrzení 100. Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v (\mathcal{S}_d, σ) a pro topologii τ platí, že $\sigma \upharpoonright_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření $\text{Id}: (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \rightarrow (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojitá a na hustou podmnožinu.

Definice 101. Distribuce na \mathbb{R}^d , které jsou restrikcemi funkcionalů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají temperované distribuce.

Tvrzení 102. Necht' Λ je temperovaná distribuce na \mathbb{R}^d , $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na \mathbb{R}^d . Pak $D^\alpha \Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce

- $D^\alpha \Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha f)$,
- $(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ a
- $(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. Dále zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ a $\Lambda \mapsto P\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru (\mathcal{S}_d^*, w^*) do sebe.

Definice 103. Fourierova transformace temperované distribuce Λ na \mathbb{R}^d je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 104.

(a) Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak Λ_g je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda}_g = \Lambda_g$. Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak $\widehat{\Lambda}_g = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty.

(b) Je-li Λ je temperovaná distribuce na \mathbb{R}^d a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak

- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, kde $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, a
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

(c) Fourierova transformace \mathcal{F} temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru (\mathcal{S}_d^*, w^*) na sebe. Platí pro ni, že $\mathcal{F}^4 = Id$.

III. Bochnerův integrál

1. Měřitelná zobrazení

Tvrzení 105. Necht' Ω je měřitelný prostor a X je metrický prostor. Pak bodová limita posloupnosti měřitelných zobrazení z Ω do X je měřitelné zobrazení.

Definice 106. Necht' Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f: \Omega \rightarrow X$ se nazývá jednoduché, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Věta 107. Necht' Ω je měřitelný prostor a X je separabilní metrický prostor. Pak $f: \Omega \rightarrow X$ je měřitelné, právě když je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X .

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a M je množina, pak symbolem $\mathcal{A}(\Omega, M)$ označíme množinu všech zobrazení definovaných μ -s. v. na Ω s hodnotami v M .

Definice 108 (Salomon Bochner (1933)). Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou a X je metrický prostor. Zobrazení z $\mathcal{A}(\Omega, X)$ nazveme silně měřitelným (též bochnerovsky měřitelným) vzhledem k μ , pokud je μ -s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X .

Lemma 109. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné, právě když je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.

Důsledek 110. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $\{f_n\} \subset \mathcal{A}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné.

Lemma 111. Necht' Ω a X jsou měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad \mathbb{K} , $f, g: \Omega \rightarrow X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.

Důsledek 112. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $f, g \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ jsou silně měřitelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou silně měřitelná zobrazení.

Definice 113 (Izrail Moisejevič Gelfand (1938), Billy James Pettis (1938)). Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ nazveme slabě měřitelným, pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f$ měřitelná funkce.

Definice 114. Necht' X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující, pokud $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Lemma 115. Necht' X je normovaný lineární prostor. Je-li $A \subset B_{X^*}$ množina w^* -hustá v B_{X^*} , pak A je 1-normující.

Lemma 116. Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x, r) = \bigcap_{f \in A} \{y \in X; |f(y) - f(x)| \leq r\}$.

Lemma 117. Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak $\text{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustý v $\text{span} A$ a $B_X \cap \text{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustá v $B_X \cap \text{span} A$.

Věta 118. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) f je silně měřitelné.
- (ii) f je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
- (iii) f je slabě měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
- (iv) Existují $E \subset \Omega$, $Y \subset X$ separabilní podprostor a $A \subset B_{Y^*}$ spočetná tak, že $\mu(E) = 0$, $f(\Omega \setminus E) \subset Y$, $B_{Y^*} \cap \text{span } A$ je w^* -hustá v B_{Y^*} a $\phi \circ f$ je měřitelná pro každé $\phi \in A$.

Tvrzení 119. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f = 0$ s. v., pak $f = 0$ s. v.

2. Bochnerův integrál

Definice 120. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f: \Omega \rightarrow X$ se nazývá *schodovité*, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

Definice 121. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je schodovité. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme *Bochnerův integrál* f přes E jako

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{x \in f(\Omega) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E) x.$$

Lemma 122. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je schodovité. Jsou-li $A, B \subset \Omega$ disjunktní měřitelné podmnožiny, pak $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.

Věta 123. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $f, g: \Omega \rightarrow X$ jsou schodovitá zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou schodovitá a $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ a $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.

Je-li (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je měřitelná na Ω , neboť je složením spojitě funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f . Tuto funkci budeme značit $\|f\|$.

Lemma 124. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je jednoduché měřitelné zobrazení. Pak f je schodovité, právě když $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < +\infty$. V tom případě je $\|\int_E f \, d\mu\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.

Lemma 125. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je silně měřitelné a $f_n: \Omega \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mu(t) = 0$. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$. Navíc je-li $g_n: \Omega \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ posloupnost schodovitých zobrazení se stejnou vlastností, jako má $\{f_n\}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$.

Definice 126. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Řekneme, že je f je *bochnerovsky integrovatelné*, pokud existuje posloupnost $f_n: \Omega \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme *Bochnerův integrál* f přes E jako

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Věta 127. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $f, g \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ jsou bochnerovsky integrovatelná, $\alpha \in \mathbb{K}$ a $E \subset \Omega$ je měřitelná.

- (a) Zobrazení $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ a $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$.
- (b) $\|\int_E f \, d\mu\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$.

Věta 128. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pak f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná.

Věta 129. Necht' (Ω, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset \mathcal{A}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Necht' $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \rightarrow f$ stejnoměrně s. v. na Ω . Pak $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$.

Věta 130 (o majorizované konvergenci). *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset \mathcal{A}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Necht' $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je takové, že $f_n \rightarrow f$ bodově s. v., a necht' $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0$. Speciálně, $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$.*

Věta 131 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|\int_E f d\mu\| < \varepsilon$ kdykoli $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(E) < \delta$.*

Věta 132. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X a Y jsou Banachovy prostory, $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak $T \circ f$ je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$\int_E T \circ f d\mu = T \left(\int_E f d\mu \right).$$

Fakt 133. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $x \in X$ a $f \in L_1(\mu)$. Pak $\int_E f(t)x d\mu(t) = (\int_E f d\mu)x$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Věta 134. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Je-li $\int_E f d\mu = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$, pak $f = 0$ s. v.*

Věta 135. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každou $E \subset \Omega$ kladné míry je*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in \overline{\text{conv}} f(E).$$

Věta 136 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál). *Necht' (Ω_1, μ_1) a (Ω_2, μ_2) jsou prostory se σ -konečnými úplnými mírami a necht' ν je zúplněním součinné míry $\mu_1 \times \mu_2$. Necht' X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k ν . Potom pro s. v. $s \in \Omega_1$ je zobrazení $t \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_2 , pro s. v. $t \in \Omega_2$ je zobrazení $s \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_1 ; zobrazení $\psi_1(s) = \int_{\Omega_2} f(s, t) d\mu_2(t)$ a $\psi_2(t) = \int_{\Omega_1} f(s, t) d\mu_1(s)$ definovaná s. v. na Ω_1 , resp. Ω_2 jsou bochnerovsky integrovatelná a*

$$\int_{\Omega_1} \psi_1 d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\nu = \int_{\Omega_2} \psi_2 d\mu_2.$$

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

Definice 137. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z $\mathcal{A}(\Omega, X)$ takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ -s. v.*

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu, X)} = \|t \mapsto \|f(t)\|\|_{L_p(\mu)}$.

Věta 138. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$.*

(a) $L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu, X)}$.

(b) Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mu, X)} = \int_{\Omega} \langle f(t), g(t) \rangle d\mu.$$

Věta 139. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p < \infty$.*

(a) Množina schodovitých zobrazení z Ω do X je hustá v $L_p(\mu, X)$.

(b) Jsou-li X i $L_p(\mu)$ separabilní, je $L_p(\mu, X)$ také separabilní.

IV. Banachovy algebry

1. Základní vlastnosti

Definice 140. Řekneme, že $(A, +, -, 0, \cdot_s, \cdot)$ je algebra nad \mathbb{K} , pokud $(A, +, -, 0, \cdot_s)$ je vektorový prostor nad \mathbb{K} , $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh, a navíc platí, že $(\alpha \cdot_s a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_s b) = \alpha \cdot_s (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Algebra nad \mathbb{K} se nazývá komutativní, pokud je její okruhové násobení komutativní.

Tvrzení 141. Necht' A je algebra nad \mathbb{K} . Položme $A_e = A \times \mathbb{K}$ a definujme vektorové operace na A_e obvyklým způsobem (tj. po složkách) a dále násobení prvků A_e pomocí vzorce

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \quad \text{pro } a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pak A_e je algebra s jednotkou $(0, 1)$ a A lze identifikovat s její podalgebrou $A \times \{0\}$. Je-li A komutativní, je A_e též komutativní.

Necht' A, B jsou algebry nad \mathbb{K} . (Algebrový) homomorfismus $\Phi: A \rightarrow B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$).

Φ nazýváme (algebraickým) izomorfismem algeber A a B , pokud Φ je bijekce.

Fakt 142. Necht' A je algebra, B je algebra s jednotkou e a $\Phi: A \rightarrow B$ je homomorfismus. Pak $\tilde{\Phi}: A_e \rightarrow B$, $\tilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x) + \lambda e$ je homomorfismus rozšiřující Φ .

Tvrzení 143. Necht' A je algebra s jednotkou a B je podalgebra A neobsahující e . Pak $C = B + \text{span}\{e\}$ je podalgebra A a zobrazení $\Phi: B_e \rightarrow C$, $\Phi(x, \lambda) = x + \lambda e$ je izomorfismus.

Definice 144. Dvojici $(A, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaná algebra, pokud A je algebra, $(A, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, a pro každé $a, b \in A$ platí, že $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Je-li metrika generovaná $\|\cdot\|$ úplná, pak $(A, \|\cdot\|)$ se nazývá Banachovou algebrou.

Tvrzení 145. Necht' $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Násobení prvků A je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojitě) jakožto zobrazení z $A \times A$ do A .

Důsledek 146. Necht' A je normovaná algebra a B je podalgebra A . Pak \bar{B} je též podalgebra A .

Důsledek 147. Pro každou normovanou algebru A existuje její zúplnění, tj. Banachova algebra taková, že A je její hustá podalgebra. Toto rozšíření je určeno jednoznačně až na izometrii. Má-li algebra A jednotku e , pak e je i jednotkou v zúplnění A .

Tvrzení 148. Necht' $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Definujme-li na A_e normu předpisem $\|(a, \alpha)\|_{A_e} = \|a\| + |\alpha|$ (tj. $A_e = A \oplus_1 \mathbb{K}$), pak A_e s touto normou je normovaná algebra. Je-li $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra, je i A_e s výše uvedenou normou Banachova algebra.

Definice 149. Necht' A a B jsou normované algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je (algebrový) homomorfismus. Říkáme, že Φ je izomorfismus normovaných algeber A a B (nebo jen izomorfismus), pokud Φ je homeomorfismus A na B ; říkáme, že Φ je izomorfismus A do B (nebo jen izomorfismus do), pokud Φ je izomorfismus A na $\text{Rng } \Phi$.

Věta 150. Necht' A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a: A \rightarrow A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I: A \rightarrow \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e , pak I je izomorfismus do a $I(e) = \text{Id}$. Platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.

Důsledek 151. Necht' $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální normovaná algebra s jednotkou. Pak na A existuje ekvivalentní norma $\|\cdot\|$ taková, že $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra a $\|e\| = 1$.

Připomeňme, že v okruhu s jednotkou (stačí dokonce v monoidu) jsou inverzní prvky k invertibilním prvkům jednoznačně určeny a invertibilní prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertibilní, pak i xy je invertibilní a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertibilních prvků budeme značit A^\times .

Fakt 152. Necht' A je algebra s jednotkou a B je její podalgebra obsahující e . Pak $B^\times \subset A^\times \cap B$.

Lemma 153. Necht' A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e-x)^{-1}$.

Lemma 154. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou.

(a) Pokud $x \in U_A$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje absolutně, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e-x)^{-1}$.

(b) Necht' $x \in A^\times$ a necht' $h \in A$ je takové, že $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Pak $x+h \in A^\times$. Pokud navíc $\|h\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$.

Definice 155. Necht' G je grupa a τ je topologie na G . Řekneme, že (G, τ) je topologická grupa, pokud jsou grupové operace (tj. násobení $\cdot: G \times G \rightarrow G$ a inverze $^{-1}: G \rightarrow G$) spojitě.

Věta 156. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou. Pak A^\times je otevřená podmnožina A a je to topologická grupa.

Tvrzení 157. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a B je její uzavřená podalgebra obsahující e . Pak $(\partial_B B^\times) \cap A^\times = \emptyset$

$$B^\times = \bigcup \{C \subset B; C \text{ je komponenta } A^\times \cap B \text{ protínající } B^\times\}.$$

2. Spektrální teorie

Definice 158. Necht' A je algebra s jednotkou a $x \in A$. Pro $x \in A$ definujeme *rezolventní množinu* prvku x jako

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K}; \lambda e - x \in A^\times\},$$

a *spektrum* prvku x jako

$$\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak pro $x \in A$ definujeme výše uvedené pojmy vzhledem k algebře A_e .

Fakt 159. Necht' A, B jsou pologrupy, $\Phi: A \rightarrow B$ je homomorfismus na a necht' A je navíc monoid s jednotkou e . Pak B je monoid s jednotkou $\Phi(e)$ a je-li $x \in A$ invertibilní, pak $\Phi(x)$ je invertibilní a $\Phi(x)^{-1} = \Phi(x^{-1})$. Je-li navíc Φ bijekce, pak $\Phi \upharpoonright_{A^\times}$ je izomorfismus grup A^\times a B^\times .

Důsledek 160. Necht' A, B jsou algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je algebraický izomorfismus. Pak $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.

Lemma 161. Necht' M je monoid a $x, y \in M$. Jsou-li alespoň dva z prvků x, y, xy a yx invertibilní, pak jsou invertibilní všechny čtyři.

Tvrzení 162. Necht' A je algebra nad \mathbb{K} .

- (a) Je-li A netriviální, pak $\sigma(0) = \{0\}$.
- (b) Má-li A jednotku, pak $\sigma(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\sigma(x)$ pro každé $x \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- (c) Je-li $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.
- (d) Je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(x^{-1})$.
- (e) Jsou-li $x, y \in A$, pak množiny $\sigma(xy)$ a $\sigma(yx)$ se liší nejvýše o prvek 0.

Fakt 163. Necht' A je algebra a B je ideál v A . Pak B je ideál i v A_e .

Tvrzení 164. Necht' A je algebra nad \mathbb{K} .

- (a) Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.
- (b) Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.
- (c) Necht' A má jednotku, B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \text{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$.
- (d) Necht' B je podalgebra A a $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A , pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.
- (e) Je-li B vlastní ideál v A , pak $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 165. Necht' A, B jsou algebry, $\Phi: A \rightarrow B$ je homomorfismus a $x \in A$. Má-li A jednotku e a $\Phi(e)$ není jednotkou v B , pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$.

Definice 166. Necht' A je algebra. Pro $x \in A$ definujeme *spektrální poloměr* prvku x jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Věta 167. Necht' A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Lemma 168. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

- (a) Pokud $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < +\infty$.
- (b) Pokud $\{a_n\}$ je nezáporná a $a_{m+n} \leq a_m a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$.

Věta 169. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) $\partial \rho_B(x) \subset \partial \rho_A(x)$ a

$$\rho_B(x) = \bigcup \{C \subset \mathbb{K}; C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.

(c) Je-li $\rho_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

(d) Má-li $\sigma_B(x)$ prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

Definice 170. Necht' Y je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f: \Omega \rightarrow Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme *derivací* zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Fakt 171. Necht' Y je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f: \Omega \rightarrow Y$ a $a \in \Omega$. Pokud existuje $f'(a)$, pak pro každé $\phi \in Y^*$ je $(\phi \circ f)'(a) = \phi(f'(a))$.

Definice 172. Necht' A je algebra nad \mathbb{K} s jednotkou. Na $\rho(x)$ definujeme *rezolventu* (též *rezolventní zobrazení*) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak definujeme rezolventu vzhledem k algebře A_e .

Tvrzení 173. Necht' A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak zobrazení $\lambda \mapsto R_x(\lambda)$ má derivaci v každém bodě množiny $\rho(x)$.

Definice 174. Necht' Y je komplexní normovaný lineární prostor, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: \Omega \rightarrow Y$. Řekneme, že f je *holomorfní* na Ω , jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$.

Věta 175 (Liouvilleova věta). Necht' Y je komplexní normovaný lineární prostor a $f: \mathbb{C} \rightarrow Y$ je holomorfní na \mathbb{C} . Je-li f omezené, pak je konstantní.

Věta 176. Necht' A je komplexní Banachova algebra a $x \in A$.

(a) Rezolventní zobrazení R_x je holomorfní na $\rho(x)$.

(b) Je-li A netriviální, pak $\sigma(x) \neq \emptyset$.

(c) $r(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ (tzv. *Beurlingův-Gelfandův vzorec*).

Důsledek 177. Je-li A komplexní Banachova algebra, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(x)$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$ konverguje absolutně. Má-li tedy A jednotku, pak $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.

Věta 178 (S. Mazur (1938), I. M. Gelfand (1941)). Necht' A je netriviální komplexní Banachova algebra s jednotkou. Pokud $A^\times = A \setminus \{0\}$, pak A je izomorfní \mathbb{C} . Pokud navíc $\|e\| = 1$, pak A je izometricky izomorfní \mathbb{C} .

3. Holomorfní kalkulus

Necht' X je komplexní Banachův prostor, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ cesta a $f: \langle \gamma \rangle \rightarrow X$ spojité zobrazení. Integrál f podél γ definujeme předpisem

$$\int_{\gamma} f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t)) d\lambda(t).$$

Integrál podél řetězce $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_n$ v \mathbb{C} ze spojitého zobrazení $f: \langle \Gamma \rangle \rightarrow X$ definujeme předpisem

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

Lemma 179. Necht' Γ je řetězec v \mathbb{C} , X je komplexní Banachův prostor, $f: \langle \Gamma \rangle \rightarrow X$ je spojité a $\phi \in X^*$. Pak $\phi(\int_{\Gamma} f) = \int_{\Gamma} \phi \circ f$.

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak řekneme, že cykl Γ obíhá K v Ω , pokud $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$, $\text{ind}_{\Gamma} z = 1$ pro $z \in K$ a $\text{ind}_{\Gamma} z = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Věta 180. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, X je komplexní Banachův prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je holomorfní. Jsou-li Γ_1, Γ_2 dva cykly v Ω takové, že $\text{ind}_{\Gamma_1}(z) = \text{ind}_{\Gamma_2}(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pak $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.

Definice 181. Necht' A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak definujeme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f R_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1} d\alpha,$$

kde Γ je libovolný cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω .

Lemma 182. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, A je Banachova algebra a $f \in L_1(\mu, A)$. Pak pro každé $x \in A$ a každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$x \left(\int_E f d\mu \right) = \int_E xf(t) d\mu(t) \quad a \quad \left(\int_E f d\mu \right) x = \int_E f(t)x d\mu(t).$$

Fakt 183. *Necht' G je grupa. Jsou-li $u, v \in G$ takové, že $uv = vu$, pak i $u^{-1}v^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, $uv^{-1} = v^{-1}u$ a $u^{-1}v = vu^{-1}$.*

Lemma 184. *Necht' A je algebra s jednotkou, $x \in A$ a $\mu, \nu \in \rho(x)$.*

(a) $R_x(\mu)R_x(\nu) = R_x(\nu)R_x(\mu)$.

(b) $R_x(\mu) - R_x(\nu) = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu)$ (tzv. rezolventní identita).

Věta 185 (holomorfní kalkulus). *Necht' A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi: H(\Omega) \rightarrow A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.

(b) Pokud $f_n \rightarrow f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

(c) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.

(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).

(e) Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(f) Pokud $y \in A$ komutuje s x , pak y komutuje i s $f(x)$.

Navíc pokud zobrazení $\Psi: H(\Omega) \rightarrow A$ splňuje (a) a (b), pak $\Psi = \Phi$.

4. Multiplikativní lineární funkcionály

Definice 186. *Necht' A je algebra nad \mathbb{K} . Homomorfismus $\varphi: A \rightarrow \mathbb{K}$ nazýváme multiplikativním lineárním funkcionálem (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$). Množinu všech nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.*

Tvrzení 187. *Necht' A je algebra. Každý multiplikativní lineární funkcionál φ na A má jednoznačné rozšíření $\tilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$ dané vzorcem $\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$ a $\Delta(A_e) = \{\tilde{\varphi}; \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$.*

Tvrzení 188. *Necht' A je algebra a $\varphi \in \Delta(A)$. Pro každé $x \in A$ je $\varphi(x) \in \sigma(x)$, a tedy $|\varphi(x)| \leq r(x)$.*

Důsledek 189. *Necht' A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A) \subset B_{A^*}$ (speciálně, každý multiplikativní lineární funkcionál na A je automaticky spojitý). Pokud A má jednotku, pak $\|\varphi\| \geq \frac{1}{\|e\|}$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Speciálně, je-li $\|e\| = 1$, pak $\Delta(A) \subset S_{A^*}$.*

Definice 190. *Necht' A je algebra. Maximálním ideálem v A nazveme takový vlastní ideál v A , který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.*

Tvrzení 191. *Necht' A je algebra s jednotkou. Pak každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A .*

Tvrzení 192. *Necht' A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li I vlastní ideál v A , je i \bar{I} vlastní ideál v A . Tedy každý maximální ideál v A je uzavřený.*

Lemma 193. *Necht' A je komutativní algebra s jednotkou a $x \in A$ není invertibilní. Pak hlavní ideál xA je vlastní.*

Věta 194. *Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi: \varphi \mapsto \text{Ker } \varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A .*

Důsledek 195. *Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou a I je vlastní ideál v A . Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi \upharpoonright_I = 0$.*

Věta 196. *Necht' A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A . Pak M je kompaktní, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak $\Delta(A)$ je kompaktní. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak M je Alexandrova kompaktifikace $\Delta(A)$.*

Zobrazení $\Phi: M \rightarrow \Delta(A_e)$, kde $\Phi(\varphi) = \tilde{\varphi}$ je jednoznačné rozšíření φ na prvek $\Delta(A_e)$, je homeomorfismus.

Necht' X, Y jsou vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^\#: Y^\# \rightarrow X^\#$ předpisem $T^\#f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^\#$ a $x \in X$.

Lemma 197. *Necht' X, Y jsou vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární bijekce. Pak $T^\#$ je bijekce a $(T^\#)^{-1} = (T^{-1})^\#$.*

Tvrzení 198. Necht' A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je algebraický izomorfismus. Pak zobrazení $\Psi = \Phi^\# \upharpoonright_{\Delta(B)}$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\Delta(A)$.

Tvrzení 199. Necht' S, T jsou topologické prostory a $h: S \rightarrow T$ je spojitý a na. Pak $\Phi: C_b(T) \rightarrow C_b(S)$, $\Phi(f) = f \circ h$ je izometrický izomorfismus Banachovy algebry $C_b(T)$ do Banachovy algebry $C_b(S)$. Jsou-li S a T lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory a h je homeomorfismus, pak $\Phi \upharpoonright_{C_0(T)}$ je izometrický izomorfismus Banachových algeber $C_0(T)$ a $C_0(S)$.

Věta 200. Necht' K, L jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) Banachovy algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou izometricky izomorfní.
- (ii) Algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou algebraicky izomorfní.
- (iii) Prostory K a L jsou homeomorfní.

Definice 201. Komutativní algebra A se nazývá *polojednoduchá*, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A , tj. pokud $\bigcap \{\text{Ker } \varphi; \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Věta 202. Necht' A, B jsou Banachovy algebry. Pokud B je komutativní a polojednoduchá, pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý.

Důsledek 203. Necht' A je komutativní polojednoduchá algebra. Pak všechny normy na A , ve kterých je A Banachova algebra, jsou ekvivalentní.

5. Gelfandova transformace

Definice 204. Necht' A je Banachova algebra nad \mathbb{K} . Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x}: \Delta(A) \rightarrow \mathbb{K}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x \upharpoonright_{\Delta(A)}$. Funkci \widehat{x} říkáme *Gelfandova transformace* prvku x .

Věta 205. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Má-li A jednotku, pak $\text{Rng } \widehat{x} = \sigma(x)$. Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \text{Rng } \widehat{x} \subset \sigma(x)$.

Důsledek 206. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\|\widehat{x}\| = r(x)$.

Definice 207. Necht' A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma: A \rightarrow C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \widehat{x}$ nazýváme *Gelfandovou transformací* algebry A .

Tvrzení 208. Necht' A je Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Γ je homomorfismus.
- (b) Podalgebra $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ odděluje body $\Delta(A)$.
- (c) Γ je prostá, právě když $\Delta(A)$ odděluje body A , tj. právě tehdy, pokud A je komutativní a polojednoduchá.

Věta 209. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Γ je spojitý homomorfismus a $\|\Gamma\| \leq 1$.
- (b) Γ je izomorfismus do, právě když existuje $K > 0$ takové, že $\|x^2\| \geq K\|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (c) Γ je izometrie do právě tehdy, když $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

Definice 210. Necht' A je pologrupa a $M \subset A$. Pak množina $M^c = \{a \in A; ax = xa \text{ pro každé } x \in M\}$, tj. množina všech prvků A komutujících s každým prvkem M , se nazývá *komutant* množiny M .

Tvrzení 211. Necht' A je pologrupa a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) $M \subset (M^c)^c$.
- (b) Množina $M^c \cap (M^c)^c$ komutuje.
- (c) Pokud komutuje M , pak komutuje též $(M^c)^c$.

Tvrzení 212. Necht' A je algebra a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) M^c je podalgebra A .
- (b) Má-li A jednotku, pak $e \in M^c$.

(c) Je-li A normovaná, pak M^c je uzavřená.

Tvrzení 213. Necht' A je algebra s jednotkou e a necht' $M \subset A$ komutuje. Pak $B = (M^c)^c$ je komutativní algebra s jednotkou e , $M \subset B$ a $B^\times = A^\times \cap B$. Tedy pro každé $x \in B$ platí, že $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Věta 214. Necht' A je komplexní Banachova algebra a $x, y \in A$ spolu komutují. Pak platí následující:

(a) $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ a $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.

(b) $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$ a $r(xy) \leq r(x)r(y)$.

6. B^* -algebry

Věta 215. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^* = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j: H_j \rightarrow H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Löwigovy-Fréchetovy-Rieszovy věty.

Definice 216. Operátor T^* z předcházející věty nazýváme *hilbertovsky adjungovaným operátorem* k T .

Věta 217. Necht' H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{**} = (T^*)^* = T$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $(Id_{H_1})^* = Id_{H_1}$.

(d) Necht' $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $\|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2$.

(e) T^* je izomorfismus, právě když T je izomorfismus.

(f) T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

Definice 218. Necht' A je algebra nad \mathbb{K} . Zobrazení $*$: $A \rightarrow A$ se nazývá *algebrová involuce*, pokud má následující vlastnosti:

- $(x + y)^* = x^* + y^*$ pro každé $x, y \in A$,
- $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$ pro každé $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(xy)^* = y^*x^*$ pro každé $x, y \in A$,
- $(x^*)^* = x$ pro každé $x \in A$ (tj. zobrazení $*$ je involuce).

Algebře, na které je definována algebrová involuce, budeme říkat *algebra s involucí*.

Fakt 219. Necht' A je algebra s involucí. Pak $(a, \alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha})$ pro $(a, \alpha) \in A_e$ je involuce na A_e rozšiřující involuci z A .

Tvrzení 220. Necht' A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) Je-li e levá nebo pravá jednotka v A , pak e je jednotka a $e^* = e$.

(b) Necht' A má jednotku. Pak $x \in A^\times$ právě tehdy, když $x^* \in A^\times$. V tomto případě pak $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

(c) $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Tvrzení 221. Necht' A je komutativní polojednoduchá Banachova algebra. Pak každá involuce na A je spojitá.

Definice 222. Banachova algebra A s involucí se nazývá *B^* -algebra*, pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Lemma 223. Necht' A je normovaná algebra s involucí. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\|x^*x\| \geq \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (ii) $\|xx^*\| \geq \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (iii) $\|x^*x\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

(iv) $\|xx^*\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

Ve všech případech je pak $\|x^*\| = \|x\|$ pro každé $x \in A$.

Tvrzení 224. Necht' A je B^* -algebra bez jednotky. Pak na A_e s involucí z Faktu 219 existuje norma $\|\cdot\|$ rozšiřující původní normu na A (a ekvivalentní normě z Tvrzení 148) taková, že A_e je B^* -algebra.

Definice 225. Necht' A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá *samoadjungovaný*, pokud $x^* = x$.

Fakt 226. Necht' A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) Prvky $x + x^*$, x^*x , xx^* , a v komplexním případě i prvek $i(x - x^*)$ jsou samoadjungované.

(b) Je-li x samoadjungovaný, je samoadjungovaný i prvek tx pro $t \in \mathbb{R}$.

(c) Je-li A komplexní, pak existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Pro ně pak platí, že $x^* = u - iv$.

Definice 227. Necht' A je algebra s involucí.

- Prvek $x \in A$ se nazývá *normální*, pokud komutuje s x^* , tj. pokud $x^*x = xx^*$.
- Pokud A má jednotku, pak prvek $x \in A$ se nazývá *unitární*, splňuje-li rovnost $x^*x = xx^* = e$, neboli $x^{-1} = x^*$.

Věta 228. Necht' A je B^* -algebra a $x \in A$.

(a) Je-li x normální, pak $\|x^n\| = \|x\|^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.

(b) Je-li A komplexní, pak $r(x^*x) = r(xx^*) = \|x\|^2$.

(c) Má-li A jednotku a x je unitární, pak $\|x\| = 1$ a $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| = 1\}$.

(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Důsledek 229. Necht' A je komplexní algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma, se kterou A je B^* -algebra.

Definice 230. Necht' A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi: A \rightarrow B$ nazýváme *$*$ -homomorfismus*, pokud zachovává operaci $*$, tj. $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ pro každé $x \in A$.

Důsledek 231. Necht' A je komplexní B^* -algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je $*$ -homomorfismus.

Důsledek 232. Necht' A, B jsou komplexní B^* -algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je $*$ -homomorfismus. Pak Φ je automaticky spojitý a navíc $\|\Phi\| \leq 1$.

Důsledek 233. Necht' A je komplexní B^* -algebra a B je její B^* -podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$. Dále necht' $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A , pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Věta 234 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943)). Necht' A je komplexní komutativní B^* -algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický $*$ -izomorfismus A na $C_0(\Delta(A))$.

Důsledek 235. Komplexní komutativní B^* -algebra A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 236. Necht' A a B jsou komplexní komutativní B^* -algebry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- A a B jsou izometricky $*$ -izomorfní.
- A a B jsou algebraicky izomorfní.
- Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.

Věta 237 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), I. Kaplansky (1953)). Každou komplexní B^* -algebru lze izometrickým $*$ -izomorfismem vnořit do $\mathcal{L}(H)$ pro vhodný komplexní Hilbertův prostor H .

7. Spojitý kalkulus pro normální prvky B^* -algeber

Věta 238 (Bent Fuglede (1950), Calvin R. Putnam (1951)). *Necht' A je komplexní B^* -algebra, $x \in A$, a necht' $a, b \in A$ jsou normální a platí, že $ax = xb$. Pak $a^*x = xb^*$.*

Definice 239. Necht' A je algebra a $M \subset A$. *Algebrovým obalem M nazveme množinu*

$$\text{alg } M = \bigcap \{B \supset M; B \text{ je podalgebra } A\}.$$

Tvrzení 240. *Necht' A je algebra a $M \subset A$. Pak $\text{alg } M = \text{span}\{x_1 x_2 \cdots x_n; x_1, \dots, x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$.*

Definice 241. Necht' A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak definujeme *uzavřený algebrový obal M jako*

$$\overline{\text{alg}} M = \bigcap \{B \supset M; B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}.$$

Tvrzení 242. *Necht' A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak $\overline{\text{alg}} M = \overline{\text{alg}} \overline{M}$.*

Fakt 243. *Necht' A, B jsou algebry a $M \subset A$. Pak každý algebrový homomorfismus $\Phi: \text{alg } M \rightarrow B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M . Jsou-li A, B normované algebry, pak každý spojitý algebrový homomorfismus $\Phi: \overline{\text{alg}} M \rightarrow B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M .*

Tvrzení 244. *Necht' A je B^* -algebra a necht' $M \subset A$ komutuje a je uzavřená na involuci. Pak $\overline{\text{alg}} M$ je komutativní B^* -podalgebra A .*

Necht' A je komplexní B^* -algebra s jednotkou a $x \in A$ je normální. Položme $B = \overline{\text{alg}}\{e, x, x^*\}$. Pak můžeme definovat

$$f(x) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x)). \quad (1)$$

Věta 245 (spojitý kalkulus). *Necht' A je komplexní B^* -algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi: C(\sigma(x)) \rightarrow A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vztahem (1), má následující vlastnosti:*

(a) Φ je izometrický $*$ -izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\text{alg}}\{e, x, x^*\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(\text{Id}) = x$.

(b) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.

(c) $f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.

(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).

(e) Pokud $\Psi: C(\sigma(x)) \rightarrow A$ je spojitý $*$ -homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(\text{Id}) = x$, pak $\Psi = \Phi$.

(f) Je-li $C \subset A$ komutativní B^* -podalgebra obsahující e a x , pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.

(g) Pokud $g \in C(f(\sigma(x)))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(h) Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g \upharpoonright_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 185.

(i) Pokud $y \in A$ komutuje s x , pak y komutuje i s $f(x)$.

(j) Je-li $0 \in \sigma(x)$ a $f(0) = 0$, pak $f(x) \in \overline{\text{alg}}\{x, x^*\}$.

Nemá-li A jednotku, provedeme celou konstrukci v A_e . Pokud pro $f \in C(\sigma(x))$ platí, že $f(0) = 0$, pak $f(x) \in A$.

8. Nezáporné prvky B^* -algeber

Definice 246. Necht' A je algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný. Řekneme, že x je *nezáporný*, pokud $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Tvrzení 247. *Necht' A je algebra s involucí a $x, y \in A$ jsou nezáporné.*

(a) Je-li $t \geq 0$, pak tx je nezáporný.

(b) Je-li A komplexní B^* -algebra, pak $x + y$ je nezáporný.

(c) Je-li A komplexní Banachova algebra a x a y spolu komutují, pak xy je nezáporný.

Fakt 248. *Necht' A je komplexní B^* -algebra a $x \in A$.*

(a) Je-li x nezáporný, pak $|x| = x$.

(b) Je-li x samoadjungovaný, pak $|x|^2 = x^2$.

(c) Je-li x nezáporný, pak $(\sqrt{x})^2 = x$. Navíc \sqrt{x} je jediné nezáporné $y \in A$ takové, že $y^2 = x$.

(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sqrt{x^2} = |x|$.

V. Operátory na Hilbertových prostorech

1. Základní vlastnosti

Věta 249. Jsou-li H_1, H_2 Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, pak platí, že

- (a) $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,
- (b) $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)^\perp$,
- (c) $\overline{\text{Rng } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp$,
- (d) $\overline{\text{Rng } T^*} = (\text{Ker } T)^\perp$.

Definice 250. Necht' X, Y jsou vektorové prostory nad \mathbb{K} . Zobrazení $S: X \times X \rightarrow Y$ se nazývá *seskvilineární*, pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici. V případě, že $Y = \mathbb{K}$, se S nazývá *seskvilineární forma*.

Tvrzení 251 (polarizační vzorec). Necht' X, Y jsou vektorové prostory nad \mathbb{K} a $S: X \times X \rightarrow Y$ je seskvilineární zobrazení. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x, y) + S(y, x) = \frac{1}{2}(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y)).$$

Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x, y) = \frac{1}{4}(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y) + iS(x + iy, x + iy) - iS(x - iy, x - iy)).$$

Věta 252. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $T: X \rightarrow X$ je lineární operátor. Necht' dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- X je komplexní.
- X je Hilbertův a T je spojitý a samoadjungovaný.

Jestliže $\langle Tx, x \rangle = 0$ pro každé $x \in X$, pak $T = 0$.

Důsledek 253. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $S, T: X \rightarrow X$ jsou lineární operátory. Necht' dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- X je komplexní.
- X je Hilbertův a S, T jsou spojitě a samoadjungované.

Pokud $\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$ pro každé $x \in X$, pak $S = T$.

Definice 254. Necht' X je normovaný lineární prostor a S je seskvilineární forma na X . Řekneme, že S je *omezená*, pokud $\sup_{x, y \in B_X} |S(x, y)| < +\infty$. V tom případě klademe $\|S\| = \sup_{x, y \in B_X} |S(x, y)|$.

Tvrzení 255. Necht' H je Hilbertův prostor. Je-li S omezená seskvilineární forma na H , pak existuje jednoznačně určený $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $S(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Navíc platí, že $\|T\| = \|S\|$.

Věta 256. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je normální.
- (ii) $\langle T^*x, T^*y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$.
- (iii) $\|T^*x\| = \|Tx\|$ pro každé $x \in H$.

Definice 257. Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *přibližným vlastním číslem* operátoru T , pokud existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že $(\lambda I - T)x_n \rightarrow 0$. Množina všech přibližných vlastních čísel operátoru T se nazývá *přibližné bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\text{ap}}(T)$.

Fakt 258. Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\lambda \in \mathbb{K}$ je přibližným vlastním číslem T , právě když $\lambda I - T$ není izomorfismus do.

Definice 259. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $T \in \mathcal{L}(X)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x \rangle; x \in S_X\}$ se nazývá *numerický range* operátoru T .

Fakt 260. Necht' X je normovaný lineární prostor takový, že $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$ (tj. X je buď komplexní, nebo reálný dimenze alespoň 2). Pak S_X je křivkově souvislá.

Tvrzení 261. Necht' X je prostor se skalárním součinem nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$.

(a) $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$ pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(b) Je-li $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$, pak množina N_T je křivkově souvislá.

(c) $\sigma_p(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.

(d) $\sigma_{ap}(T) \subset \overline{N_T}$. Je-li X Hilbertův, pak $\sigma(T) \setminus \sigma_{ap}(T) \subset N_T$, a tedy $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

Fakt 262. Necht' A je algebra nad \mathbb{K} s jednotkou a involucí, $x \in A$ je normální a $\lambda \in \mathbb{K}$. Pak $\lambda e - x$ je normální.

Věta 263. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$.

(b) $\text{Rng } T$ je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.

(c) T je invertibilní právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.

(d) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

(e) $\lambda \in \sigma_p(T)$ právě tehdy, když $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem T^* příslušným vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$.

(f) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T , pak $\text{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

Věta 264. Necht' H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:

(a) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) $N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

(c) $r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in N_T\} = \|T\|$.

Tvrzení 265. Necht' H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $N_T \subset \mathbb{R}$.

Důsledek 266. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Je-li T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$, právě když $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$. Je-li H komplexní, pak T je nezáporný (prvek algebry $\mathcal{L}(H)$), právě když $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.

Věta 267. Necht' H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) P je samoadjungovaná.

(ii) P je normální.

(iii) P je ortogonální.

Tvrzení 268. Necht' H je Hilbertův prostor, $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\text{Rng } S \perp \text{Rng } T$ právě tehdy, když $ST = 0$.

Definice 269. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se nazývá unitární, pokud $T^* \circ T = I_{H_1}$ a $T \circ T^* = I_{H_2}$, neboli $T^{-1} = T^*$.

Věta 270. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) T je unitární.

(ii) T je na a $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in H$.

(iii) T je izometrie na.

Lemma 271. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Necht' Y je uzavřený podprostor H_2 takový, že $\text{Rng } T \subset Y$ a $S \in \mathcal{L}(H_1, Y)$ je definovaný jako $Sx = Tx$ pro $x \in H_1$. Pak $S^* = T^* \upharpoonright_Y$.

Věta 272. Necht' H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $A \in \mathcal{L}(H_1)$ a $U \in \mathcal{L}(\overline{\text{Rng } A}, \overline{\text{Rng } T})$ taková, že $T = U \circ A$, A je nezáporný a U je unitární.

Je-li T izomorfismus, pak A je automorfismus H_1 . Je-li T kompaktní, pak A je též kompaktní.

Věta 273. Necht' H je Hilbertův prostor. Pak $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}$.

Definice 274. Necht' A je množina a $f: A \rightarrow A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f , pokud $f(B) \subset B$, tj. $f \upharpoonright_B: B \rightarrow B$.

Fakt 275. Necht' H je Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ a $M \subset H$ je množina vlastních vektorů T (ne nutně všech).

(a) Je-li $Y \subset H$ invariantní vůči T , pak Y^\perp je invariantní vůči T^* .

(b) $\overline{\text{span } M}$ je invariantní vůči T .

(c) Je-li T normální, pak $\overline{\text{span } M}$ i $(\overline{\text{span } M})^\perp$ jsou invariantní vůči T i T^* .

(d) Necht' $Y \subset H$ je uzavřený podprostor invariantní vůči T i T^* . Pak $(T \upharpoonright_Y)^* = T^* \upharpoonright_Y$. Je-li tedy T samoadjungovaný, resp. normální, pak $T \upharpoonright_Y \in \mathcal{L}(Y)$ je samoadjungovaný, resp. normální.

Věta 276 (spektrální rozklad normálního kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907)). Necht' H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$. Dále předpokládejme, že

- T je samoadjungovaný, nebo
- H je komplexní a T je normální.

Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T . Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\text{Rng } T}$ a pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n .

Je-li $\{\lambda_n\}_{n=1}^M$ prostá posloupnost všech vlastních čísel T a P_n je ortogonální projekce na $\text{Ker}(\lambda_n I - T)$, pak

$$I = \sum_{n=1}^M P_n,$$

kde řada konverguje bodově bezpodmínečně (tj. $x = \sum_{n=1}^M P_n x$ bezpodmínečně pro každé $x \in H_1$) a

$$T = \sum_{n=1}^M \lambda_n P_n,$$

kde řada konverguje bezpodmínečně v prostoru $\mathcal{L}(H)$.

Věta 277 (reprezentace kompaktního operátoru; E. Schmidt (1907)). Necht' H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Pak existuje $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systémy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_1$ a $\{v_n\}_{n=1}^N \subset H_2$ takové, že pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n.$$

Dále $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^N$ je posloupnost všech vlastních čísel operátoru $T^* \circ T$, přičemž $|\{n \in \mathbb{N}; \lambda_n = \lambda\}| = \dim \text{Ker}(\lambda I - T)$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Tedy posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ je určena jednoznačně až na permutaci a je-li $N = \infty$, pak $\lambda_n \rightarrow 0$.