Věta 1 (Cauchyova nerovnost)**.** *Nechť $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

V. Funkce více proměnných

V.1. $\mathbb{R}^n$ jako vektorový a metrický prostor

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množina $\mathbb{R}^n$ je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$$

Definice. *Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na* $\mathbb{R}^n$ rozumíme funkci $\rho\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \langle 0, +\infty)$ definovanou předpisem

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ nazýváme *vzdáleností bodu $\boldsymbol{x}$ od bodu $\boldsymbol{y}$.*

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)**.** *Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:*

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, *(symetrie)*

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, *(trojúhelníková nerovnost)*

(iv) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon \rho(\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = |\lambda|\, \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *(homogenita)*

(v) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. *(translační invariance)*

Definice. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}, r > 0$. Množinu $B(\boldsymbol{x}, r)$ definovanou předpisem

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\ \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < r\}$$

nazýváme *otevřenou koulí o poloměru r a středu $\boldsymbol{x}$* nebo také *okolím bodu $\boldsymbol{x}$*.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem množiny M*, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$.
Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *otevřená v* $\mathbb{R}^n$, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.
Vnitřkem množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M a značíme jej $\operatorname{Int} M$.

Věta 3 (vlastnosti otevřených množin)**.**

(i) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Nechť množiny $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A \neq \emptyset$, jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$. Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$.

(iii) Nechť množiny G_i, $i = 1, \dots, m$, jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$. Pak $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka.
(ii) *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*
(iii) *Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je *hraničním bodem množiny M*, pokud pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

Hranicí množiny M rozumíme množinu všech hraničních bodů M a značíme ji $H(M)$.
Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$ a značíme jej $\overline{M}$.
Řekneme, že množina M je *uzavřená v* $\mathbb{R}^n$, jestliže obsahuje všechny své hraniční body, tedy $H(M) \subset M$, neboli $M = \overline{M}$.

Definice. Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k* $\boldsymbol{x}$, pokud

$$\lim_{j\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^j) = 0.$$

Prvek $\boldsymbol{x}$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$.

Posloupnost $\{\boldsymbol{y}^j\}_{j=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{R}^n$ je *konvergentní*, pokud existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\{\boldsymbol{y}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{y}$.

Poznámka. Platí, že $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists j_0 \in \mathbb{N} \; \forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \colon \boldsymbol{x}^j \in B(\boldsymbol{x}, \varepsilon).$$

Věta 4. *Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x}$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ číselná posloupnost $\{x_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k číslu x_i.*

Poznámka. Věta 4 říká, že konvergence v prostoru $\mathbb{R}^n$ je totéž, jako konvergence „po souřadnicích“. Posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ má tedy nejvýše jednu limitu. Pokud existuje, označíme ji symbolem $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j$. Někdy též místo $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$ píšeme $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x}$.

Věta 5 (charakterizace uzavřených množin)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Množina M je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(iii) Každý bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, k němuž konverguje nějaká posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}$ prvků množiny M, patří do množiny M.

Věta 6 (vlastnosti uzavřených množin)**.**

(i) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Nechť množiny $F_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A \neq \emptyset$, jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$. Pak $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$.

(iii) Nechť množiny F_i, $i = 1, \dots, m$, jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$. Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka.

(ii) *Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

(iii) *Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Pozorování. Nechť $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Pak $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Věta 7. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:*

(i) Množina $\overline{M}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Množina $\operatorname{Int} M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(iii) Množina M je otevřená v $\mathbb{R}^n$, právě když $M = \operatorname{Int} M$.

Poznámka. Množina $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M v následujícím smyslu: Je-li G množina otevřená v $\mathbb{R}^n$ splňující $G \subset M$, pak $G \subset \operatorname{Int} M$. Podobně $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující M.

Definice. Řekneme, že *množina* $M \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, jestliže existuje $r > 0$ splňující $M \subset B(\boldsymbol{o}, r)$. *Posloupnost* prvků $\mathbb{R}^n$ je *omezená*, jestliže množina jejích členů je omezená.

Věta 8. *Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, právě když je omezená množina $\overline{M}$.*

V.2. Spojité funkce více proměnných

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* $\boldsymbol{x}$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M \colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

Poznámka. Funkce f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, jestliže je spojitá v $\boldsymbol{x}$ vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$.

Věta 9. *Nechť* $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$, $f: M \to \mathbb{R}$, $g: M \to \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Jestliže* f *a* g *jsou spojité v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M, *potom také funkce* cf, $f + g$ *a* fg *jsou spojité v* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M. *Pokud navíc funkce* g *je nenulová v bodě* $\boldsymbol{x}$, *pak je spojitá i funkce* f/g *v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M.

Věta 10. *Nechť* $r, s \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^s$, $L \subset \mathbb{R}^r$ *a* $\boldsymbol{y} \in M$. *Nechť* $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ *jsou funkce definované na* M, *spojité v bodě* $\boldsymbol{y}$ *vzhledem k* M *a* $[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})] \in L$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in M$. *Nechť* $f: L \to \mathbb{R}$ *je spojitá v bodě* $[\varphi_1(\boldsymbol{y}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{y})]$ *vzhledem k* L. *Potom složená funkce* $F: M \to \mathbb{R}$ *daná předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{x} \in M,$$

je spojitá v $\boldsymbol{y}$ *vzhledem k* M.

Věta 11 (Heine)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ *a* $f: M \to \mathbb{R}$. *Pak je ekvivalentní:*

(i) f *je spojitá v* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M,

(ii) $\lim\limits_{j \to \infty} f(\boldsymbol{x}^j) = f(\boldsymbol{x})$ *pro každou posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující* $\boldsymbol{x}^j \in M$ *pro* $j \in \mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{j \to \infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *spojitá na množině* M, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$ vzhledem k M.

Poznámka. Funkce $\pi^j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^j(\boldsymbol{x}) = x_j$, $1 \le j \le n$, jsou spojité na $\mathbb{R}^n$. Těmto funkcím říkáme *souřadnicové projekce*.

Věta 12. *Nechť* f *je spojitá funkce na* $\mathbb{R}^n$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(i) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) < c\}$ *je otevřená v* $\mathbb{R}^n$.

(ii) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) > c\}$ *je otevřená v* $\mathbb{R}^n$.

(iii) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \le c\}$ *je uzavřená v* $\mathbb{R}^n$.

(iv) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \ge c\}$ *je uzavřená v* $\mathbb{R}^n$.

(v) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) = c\}$ *je uzavřená v* $\mathbb{R}^n$.

Definice. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme *kompaktní*, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v M.

Věta 13 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$)**.** *Množina* $M \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*

Lemma 14. *Nechť* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *je omezená posloupnost v* $\mathbb{R}^n$. *Pak z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$

- *maxima na* M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M: f(\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x})$,
- *lokálního maxima vzhledem k* M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M: f(\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x})$,
- *ostrého maxima na* M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M \setminus \{\boldsymbol{x}\}: f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$,
- *ostrého lokálního maxima vzhledem k* M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in \big(B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\}\big) \cap M: f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$.

Analogicky definujeme *minimum* a *ostré minimum* na M, *lokální minimum* a *ostré lokální minimum* vzhledem k M.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *lokální maximum*, má-li v $\boldsymbol{x}$ lokální maximum vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$.

Podobně pro *lokální minimum*, *ostré lokální maximum* a *ostré lokální minimum*.

Věta 15 (o nabývání extrémů)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}^n$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f: M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M. *Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Důsledek. *Nechť* $M \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní množina a* $f: M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M. *Pak* f *je omezená na* M.

Definice. Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *limitu* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}: f(\boldsymbol{x}) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka.

- Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.

- f je spojitá v $\boldsymbol{a}$, právě když $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.
- Pro limity funkcí více proměnných platí obdobné věty jako pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika, policajti, ...).

Věta 16 (limita složené funkce více proměnných s podmínkou (S))**.** *Nechť $r, s \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a} \in M \subset \mathbb{R}^s$, $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce definované na M splňující $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \varphi_j(\boldsymbol{x}) = b_j$, $j = 1, \dots, r$, a $\boldsymbol{b} = [b_1, \dots, b_r] \in \mathbb{R}^r$. Nechť f je funkce r proměnných spojitá v bodě $\boldsymbol{b}$. Definujme složenou funkci $F\colon M \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in M.$$

Pak $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{b})$.

V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^j) - f(\boldsymbol{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme *parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$* (pokud limita existuje).

Věta 17 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí:*

Parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace (tj. funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ jsou spojité na G pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$). Pak říkáme, že funkce f je *třídy $\mathcal{C}^1$ na G*. Množinu všech takových funkcí značíme $C^1(G)$.

Poznámka. Pokud je $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a neprázdná a $f, g \in C^1(G)$, pak i funkce $f + g \in C^1(G)$, $f - g \in C^1(G)$ a $fg \in C^1(G)$. Pokud navíc $\forall \boldsymbol{x} \in G\colon g(\boldsymbol{x}) \neq 0$, pak i $f/g \in C^1(G)$.

Tvrzení 18 (slabá Lagrangeova věta)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly, $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, $f \in C^1(I)$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Potom existují body $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^n \in I$, splňující $\xi^i_j \in \langle a_j, b_j \rangle$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, takové, že*

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^i)(b_i - a_i).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^1(G)$. Pak graf funkce

$$T\colon \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})(x_n - a_n), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

nazýváme *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$.

Věta 19 (o tečné nadrovině)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$, $f \in C^1(G)$ a T je funkce, jejímž grafem je tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$. Pak*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})} = 0.$$

Věta 20. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $f \in C^1(G)$. Pak f je spojitá na G.*

Věta 21 (derivace složené funkce)**.** *Nechť $r, s \in \mathbb{N}$ a nechť $G \subset \mathbb{R}^s$, $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$, $f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})] \in H$ pro každé $\boldsymbol{x} \in G$. Potom složená funkce $F\colon G \to \mathbb{R}$ daná předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{x} \in G,$$

je třídy $\mathcal{C}^1$ na G. Nechť $\boldsymbol{a} \in G$ a $\boldsymbol{b} = [\varphi_1(\boldsymbol{a}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{a})]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^1(G)$. *Gradientem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$* rozumíme vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right].$$

Definice. Je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$, $f \in C^1(G)$ a $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, pak bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme *stacionárním* (někdy též *kritickým*) *bodem* funkce f.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\boldsymbol{a} \in G$. Parciální derivaci funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ podle proměnné x_j v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$$

a nazýváme ji *parciální derivací druhého řádu* funkce f. Je-li $i = j$, pak používáme značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$.

Analogicky se definují parciální derivace vyšších řádů.

Poznámka. Obecně nemusí platit, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

Věta 22 (o záměnnosti parciálních derivací)**.** *Nechť $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité. Pak platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f je *třídy $\mathcal{C}^k$ na G*, má-li f všechny parciální derivace až do řádu k spojité na množině G. Množinu všech takových funkcí značíme $C^k(G)$.

Řekneme, že funkce f je *třídy $\mathcal{C}^\infty$ na G*, má-li f všechny parciální derivace všech řádů spojité na množině G. Množinu všech funkcí třídy $\mathcal{C}^\infty$ na G značíme $C^\infty(G)$.

V.4. Věta o implicitních funkcích

Věta 23 (o implicitní funkci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

(i) $F \in C^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0.$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Označíme-li toto y jako $\varphi(\boldsymbol{x})$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))} \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \in U,\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

Věta 24 (o implicitních funkcích)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j : G \to \mathbb{R}$ pro $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^k(G)$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} \in V$ s vlastností $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$. Označíme-li jednotlivé souřadnice tohoto $\boldsymbol{y}$ jako $\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \dots, m$, pak takto vzniklé funkce $\varphi_j \in C^k(U)$.

Poznámka. Symbol v podmínce (iii) Věty 24 se nazývá *determinant*. Definován bude později.

Pro $m = 1$ platí $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$, $a \in \mathbb{R}$, tedy podmínka (iii) Věty 24 přechází v podmínku (iii) Věty 23.

Pro $m = 2$ platí $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

V.5. Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 25 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(I) $\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boldsymbol{o}$,

(II) existuje reálné číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$

Věta 26 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$,*

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) vektory

$$\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$$

jsou lineárně závislé,

(II) existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ splňující

$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{o}.$$

Poznámka.

- Pojem *lineární závislosti vektorů* bude zaveden později.

  Pro $m = 1$ platí, že vektor je lineárně závislý, právě když je nulový.

  Pro $m = 2$ platí, že dva vektory jsou lineárně závislé, právě když jeden z nich je násobkem druhého.
- Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se nazývají *Lagrangeovy multiplikátory*.

V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že M je *konvexní množina*, jestliže platí:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle \colon t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in M.$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- *konkávní na M*, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle \colon f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}),$$

- *ryze konkávní na M*, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}\ \forall t \in (0, 1) \colon f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}).$$

Poznámka. Obrácením nerovností obdržíme definici *konvexní* a *ryze konvexní* funkce.

Poznámka. Funkce f je konvexní (ryze konvexní), právě když funkce $-f$ je konkávní (ryze konkávní).

Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro konkávní a ryze konkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro konvexní a ryze konvexní funkce.

Poznámka.

- Pokud je funkce f je ryze konkávní na M, pak je i konkávní na M.
- Nechť funkce f je konkávní na M. Pak f je ryze konkávní na M, právě když graf f „neobsahuje úsečku“, tj.

$$\neg\big(\exists \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b},\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle \colon f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) = tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b})\big).$$

Věta 27. *Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Pak f je spojitá na G.*

Věta 28. *Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M;\ f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ konvexní.*

Věta 29 (charakterizace konkávních funkcí třídy $\mathcal{C}^1$)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$.*

(i) Funkce f je konkávní na G, právě když

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i).$$

(ii) Funkce f je ryze konkávní na G, právě když

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}\colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i).$$

Důsledek 30. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$ je konkávní na G. Je-li bod $\boldsymbol{a} \in G$ stacionárním bodem funkce f (tj. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$), pak je bod $\boldsymbol{a}$ bodem maxima funkce f na množině G.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- *kvazikonkávní na M*, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle\colon f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\},$$

- *ryze kvazikonkávní na M*, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b},\ \forall t \in (0, 1)\colon f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

Poznámka. Obrácením nerovností a záměnou minima za maximum obdržíme definici *kvazikonvexní* a *ryze kvazikonvexní* funkce.

Poznámka. Funkce f je kvazikonvexní (ryze kvazikonvexní), právě když funkce $-f$ je kvazikonkávní (ryze kvazikonkávní).

Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro kvazikonkávní a ryze kvazikonkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro kvazikonvexní a ryze kvazikonvexní funkce.

Poznámka.

- Pokud je funkce f je ryze kvazikonkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.
- Nechť funkce f je kvazikonkávní na M. Pak f je ryze kvazikonkávní na M, právě když graf f „neobsahuje vodorovnou úsečku“, tj.

$$\neg\big(\exists \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b},\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle\colon f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a})\big).$$

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

- Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.
- Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.

Věta 31 (o jednoznačnosti extrému)**.** *Nechť f je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.*

Důsledek. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní, omezená, uzavřená a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na M. Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.*

Věta 32 (charakterizace kvazikonkávních funkcí pomocí úrovňových množin)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Funkce f je kvazikonkávní na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M;\ f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ konvexní.*

VI. Maticový počet

VI.1. Základní operace s maticemi

Definice. Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme *maticí typu* $m \times n$. Zkráceně zapisujeme $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Matici typu $n \times n$ nazýváme *čtvercovou maticí řádu* n.

Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$.

Definice. Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i*-tém řádku* matice $\mathbb{A}$.

O m-tici čísel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme jako o j*-tém sloupci* matice $\mathbb{A}$.

Definice. Řekneme, že dvě matice se rovnají, pokud jsou stejného typu a všechny odpovídající prvky se rovnají, tj. pokud $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ a $\mathbb{B} = (b_{uv})_{\substack{u=1..r \\ v=1..s}}$, pak $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, právě když $m = r$, $n = s$ a $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Definice. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$, $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak *součtem matic* $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ rozumíme matici

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součinem reálného čísla λ *a matice* $\mathbb{A}$ (též λ-násobkem matice $\mathbb{A}$) rozumíme matici

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)**.** *Platí:*

- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(m \times n)\colon \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)\colon \mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$, *(komutativita)*
- $\exists! \mathbb{O} \in M(m \times n)\ \forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\colon \mathbb{A} + \mathbb{O} = \mathbb{A}$, *(existence nulového prvku)*
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \exists \mathbb{C}_{\mathbb{A}} \in M(m \times n)\colon \mathbb{A} + \mathbb{C}_{\mathbb{A}} = \mathbb{O}$, *(existence opačného prvku)*
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\colon (\lambda\mu)\mathbb{A} = \lambda(\mu\mathbb{A})$,
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\colon 1 \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}$,
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\colon (\lambda + \mu)\mathbb{A} = \lambda\mathbb{A} + \mu\mathbb{A}$,
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon \lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}$.

Poznámka.

- Matici $\mathbb{O}$ z předešlého tvrzení říkáme *nulová matice* a všechny její prvky jsou nulové.
- Matice $\mathbb{C}_{\mathbb{A}}$ z předešlého tvrzení se nazývá *matice opačná k* $\mathbb{A}$. Je určena jednoznačně, značíme ji $-\mathbb{A}$ a platí $-\mathbb{A} = (-a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ a $-\mathbb{A} = -1 \cdot \mathbb{A}$.

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, $\mathbb{A} = (a_{is})_{\substack{i=1..m \\ s=1..n}}$, $\mathbb{B} \in M(n \times k)$, $\mathbb{B} = (b_{sj})_{\substack{s=1..n \\ j=1..k}}$. Pak *součinem matic* $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ rozumíme matici $\mathbb{A}\mathbb{B} \in M(m \times k)$, $\mathbb{A}\mathbb{B} = (c_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..k}}$, kde

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)**.** *Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \forall \mathbb{B} \in M(n \times k)\ \forall \mathbb{C} \in M(k \times l)\colon \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}) = (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}$, *(asociativita násobení)*

(ii) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \forall \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times k)\colon \mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$, *(distributivita zleva)*

(iii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)\ \forall \mathbb{C} \in M(n \times k)\colon (\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$, *(distributivita zprava)*

(iv) $\exists! \mathbb{I} \in M(n \times n)\ \forall \mathbb{A} \in M(n \times n)\colon \mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{I} = \mathbb{A}$, *(existence a jednoznačnost jednotkové matice $\mathbb{I}$)*

(v) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \forall \mathbb{B} \in M(n \times k)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon (\lambda\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\lambda\mathbb{B}) = \lambda(\mathbb{A}\mathbb{B})$.

Poznámka. Pozor! Maticové násobení není komutativní.

Definice. *Transponovanou maticí* k matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. pokud $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, pak $\mathbb{A}^T = (b_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$, kde $b_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Věta 35 (vlastnosti transponovaných matic)**.** *Platí:*

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\colon \left(\mathbb{A}^T\right)^T = \mathbb{A}$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)\colon (\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,

(iii) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\ \forall \mathbb{B} \in M(n \times k)\colon (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

VI.2. Regulární matice

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je *regulární* matice, pokud existuje $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ je *inverzní maticí* k matici $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, jestliže $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Poznámka. Matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární, právě když k ní existuje inverzní matice.

Poznámka.

- Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\mathbb{A}^{-1}$.
- Pokud pro matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ platí $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$, pak také $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Věta 36 (regularita a maticové operace)**.** *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:*

(i) *$\mathbb{A}^{-1}$ je regulární matice a $\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A}$,*

(ii) *$\mathbb{A}^T$ je regulární matice a $\left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^T$,*

(iii) *$\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární matice a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.*

Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *je lineární kombinací vektorů* $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ *s koeficienty* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k.$$

V tomto případě také říkáme, že *lineární kombinace vektorů* $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ *s koeficienty* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *je rovna* $\boldsymbol{u}$.

Pokud $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, pak mluvíme o *triviální lineární kombinaci* vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$; je-li některý koeficient nenulový, pak mluvíme o *netriviální lineární kombinaci*.

Definice. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou *lineárně závislé*, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud nejsou lineárně závislé, tj. pokud platí:

kdykoli $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{o}$, pak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

(Mezi všemi lineárními kombinacemi vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ je rovna nulovému vektoru jenom triviální lineární kombinace.)

Poznámka. Vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ jsou lineárně závislé, právě když jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. *Hodností matice* $\mathbb{A}$ rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků, tj. hodnost je rovna $k \in \mathbb{N}$, jestliže

(i) existuje k lineárně nezávislých řádkových vektorů matice $\mathbb{A}$ a

(ii) každá l-tice řádkových vektorů matice $\mathbb{A}$, kde $l > k$, je lineárně závislá.

Hodnost nulové matice je rovna nule. Hodnost matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je *schodovitá*, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Poznámka. Hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Definice. *Elementárními řádkovými úpravami* matice $\mathbb{A}$ rozumíme:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice. *Transformací* budeme rozumět konečnou posloupnost řádkových elementárních úprav. Matici, která vznikne z matice $\mathbb{A}$ aplikací transformace $\mathcal{T}$ budeme značit $\mathcal{T}(\mathbb{A})$. Fakt, že $\mathbb{B} = \mathcal{T}(\mathbb{A})$, také budeme někdy značit takto: $\mathbb{A} \overset{\mathcal{T}}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$.

Věta 37 (vlastnosti transformace)**.**

(i) Nechť $\mathbb{A}$ je matice. Pak existuje transformace převádějící matici $\mathbb{A}$ na schodovitou matici.

(ii) Nechť $\mathcal{T}_1$ je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak existuje transformace $\mathcal{T}_2$ aplikovatelná na matice o m řádcích taková, že pro každé dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$ platí $\mathbb{B} = \mathcal{T}_1(\mathbb{A})$, právě když $\mathbb{A} = \mathcal{T}_2(\mathbb{B})$.

(iii) Nechť $\mathbb{A}$ je matice a $\mathcal{T}$ je transformace aplikovatelná na $\mathbb{A}$. Pak $h(\mathcal{T}(\mathbb{A})) = h(\mathbb{A})$.

Poznámka. Podobně jako jsme definovali elementární řádkové úpravy matic, můžeme definovat i elementární sloupcové úpravy matic. Lze ukázat, že elementární sloupcové úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka. Lze ukázat, že pro matici $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ platí $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.

Věta 38 (součin a transformace)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times k)$, $\mathbb{B} \in M(k \times n)$ a $\mathcal{T}$ je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak $\mathcal{T}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathcal{T}(\mathbb{A})\mathbb{B}$.*

Lemma 39. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a $h(\mathbb{A}) = n$. Pak existuje transformace, která převádí $\mathbb{A}$ na $\mathbb{I}$.*

Věta 40. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$.*

VI.3. Determinanty

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Symbolem $\mathbb{A}_{ij}$ označíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. *Determinant matice* $\mathbb{A}$ definujeme takto:

$$\det \mathbb{A} = \begin{cases} a_{11} & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} & \text{pokud } n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det \mathbb{A}$ budeme také používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 41. *Nechť $j, n \in \mathbb{N}$, $j \le n$ a matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$ se shodují ve všech řádcích vyjma j-tého. Nechť j-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je roven součtu j-tého řádku matice $\mathbb{B}$ a j-tého řádku matice $\mathbb{C}$. Pak platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B} + \det \mathbb{C}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ u_1+v_1 & \dots & u_n+v_n \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ u_1 & \dots & u_n \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ v_1 & \dots & v_n \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Věta 42 (determinant a elementární úpravy)**.** *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{A}' \in M(n \times n)$.*

(i) Jestliže matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ jeden řádek vynásobíme reálným číslem μ, pak platí $\det \mathbb{A}' = \mu \det \mathbb{A}$.

(ii) Jestliže matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme elementární řádkovou úpravu prvního druhu), pak platí $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.

(iii) Jestliže matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ přičteme μ-násobek jednoho řádku k jinému řádku (tj. provedeme elementární řádkovou úpravu třetího druhu), pak platí $\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}$.

Důsledek 43 (determinant a transformace)**.** *(i) Nechť $\mathcal{T}$ je transformace aplikovatelná na matice typu $n \times n$. Pak existuje nenulové číslo $\alpha_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou matici $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathcal{T}(\mathbb{A}) = \alpha_{\mathcal{T}} \det \mathbb{A}$.

(ii) Jestliže matice $\mathbb{A}'$ vznikne ze čtvercové matice $\mathbb{A}$ jistou transformací, pak $\det \mathbb{A} \neq 0$*, právě když* $\det \mathbb{A}' \neq 0$.

Poznámka. Determinant matice s nulovým řádkem je roven nule. Determinant matice, která má dva řádky shodné, je také roven nule.

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je *horní trojúhelníková matice*, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je *dolní trojúhelníková matice*, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Věta 44. *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí*

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Věta 45. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta 46 (determinant součinu)**.** *Pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathbb{A}\mathbb{B} = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$.

Věta 47 (determinant a transpozice)**.** *Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathbb{A}^T = \det \mathbb{A}$.

Věta 48. *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Pak*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbb{A}_{ik} \quad \textit{(rozvoj podle k-tého sloupce),}$$

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det \mathbb{A}_{kj} \quad \textit{(rozvoj podle k-tého řádku).}$$

VI.4. Řešení soustav lineárních rovnic

Soustava *m lineárních rovnic o n neznámých* $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{S}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Maticový zápis

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n)$, se nazývá *matice soustavy*, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M(m \times 1)$ *vektor pravých stran* a $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1)$ *vektor neznámých.*

Definice. Matici

$$(\mathbb{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (S).

Tvrzení 49. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in M(m \times 1)$ *a* $\mathcal{T}$ *je transformace matic s m řádky. Označme* $\mathbb{A}' = \mathcal{T}(\mathbb{A})$ *a* $\boldsymbol{b}' = \mathcal{T}(\boldsymbol{b})$. *Pak pro* $\boldsymbol{y} \in M(n \times 1)$ *platí* $\mathbb{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, *právě když* $\mathbb{A}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}'$, *neboli soustavy* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *a* $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ *mají stejnou množinu řešení.*

Věta 50 (Rouchéova-Fontenéova)**.** *Soustava* (S) *má řešení právě tehdy, když matice této soustavy má stejnou hodnost jako rozšířená matice této soustavy.*

Soustavy n rovnic o n neznámých

Věta 51. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) matice $\mathbb{A}$ *je regulární,*

(ii) soustava (S) *má pro každé* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ *právě jedno řešení,*

(iii) soustava (S) *má pro každé* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ *alespoň jedno řešení.*

Věta 52 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je regulární matice,* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Pak*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \mathbb{A}}$$

pro $j = 1, \dots, n$.

VI.5. Matice a lineární zobrazení

Definice. Řekneme, že zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je *lineární*, pokud platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n : f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$.

Definice. Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$. Vektor s n složkami

$$\boldsymbol{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots i\text{-tá souřadnice}$$

nazýváme *i-tým kanonickým bázovým vektorem* prostoru $\mathbb{R}^n$. Množinu $\{\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n\}$ všech kanonických bázových vektorů v $\mathbb{R}^n$ nazýváme *kanonickou bází prostoru* $\mathbb{R}^n$.

Vlastnosti kanonické báze:

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}^1 + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{e}^n$,

(ii) vektory $\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Věta 53 (reprezentace lineárních zobrazení)**.** *Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ taková, že*

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n : \; f(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A}\boldsymbol{u}.$$

Poznámka. Matice $\mathbb{A}$ z předchozí věty je určena jednoznačně a nazývá se *reprezentující maticí* zobrazení f.

Věta 54. *Nechť zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) f je bijekce (tj. f je prosté zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$),

(ii) f je prosté zobrazení,

(iii) f je zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.

Věta 55 (skládání lineárních zobrazení)**.** *Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ a $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{B} \in M(k \times m)$. Potom složené zobrazení $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární a je reprezentováno maticí $\mathbb{B}\mathbb{A}$.*

VII. Číselné řady

VII.1. Základní pojmy

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme *nekonečnou řadou*. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat *n-tým členem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem* nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada *konverguje*, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada *diverguje*.

Věta 56 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Poznámka. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

VII.2. Řady s nezápornými členy a absolutní konvergence

Věta 57 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \le a_n \le b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Věta 58. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní*, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, pak ji nazýváme *neabsolutně konvergentní*.

Poznámka. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \le b_n$. Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (dokonce absolutně konvergentní).

Věta 59 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*.$$

- *Je-li $c \in (0, +\infty)$, pak konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ekvivalentní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*
- *Je-li $c = 0$, pak z konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- *Je-li $c = +\infty$, pak z divergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne divergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Věta 60 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada. Potom platí:*

(i) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*

(ii) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 61 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nenulovými členy. Potom platí:*

(i) Je-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$*, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*

(ii) Je-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$*, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 62. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

VII.3. Alternující řady

Věta 63 (Leibnizovo kritérium)**.** *Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Nechť platí*

- *$a_n \ge a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

VII.4. Hlubší vlastnosti absolutně konvergentních řad

Definice. Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme *přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 64 (přerovnávání absolutně konvergentních řad)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Potom každé její přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

Poznámka (Riemannova věta). Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní, pak pro libovolné $s \in \mathbb{R}^*$ existuje její přerovnání, jehož součet je s, a existuje její přerovnání, které nemá součet.

VIII. Primitivní funkce a Riemannův integrál

VIII.1. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme *dělením intervalu* $\langle a, b\rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme *dělícími body*.

Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b\rangle$ je *zjemněním dělení* D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\bigl\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\bigr\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\bigl\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\bigr\}.$$

Definice. Řekneme, že funkce f má *Riemannův integrál* na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je pak rovna společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Značíme ji $\displaystyle\int_a^b f$. Pokud $a > b$, definujeme $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$, v případě, že $a = b$, definujeme $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Poznámka. Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, D' zjemňuje D a nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D).$$

Mějme nyní dvě dělení D_1, D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení D' zjemňující dělení D_1 i dělení D_2. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D_2).$$

Odtud lze snadno odvodit $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

Lemma 65 (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

(a) $\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

(b) Funkce f má na $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 66. *(i) Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c, d\rangle$.*

(ii) Nechť $c \in (a, b)$ a funkce f má Riemannův integrál na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1}$$

Poznámka. Vzorec (1) platí pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$, pokud existuje integrál funkce f přes interval $\bigl\langle \min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}\bigr\rangle$.

Věta 67 (linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

(i) funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

(ii) funkce $f + g$ má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Věta 68. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, a nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí:*

(i) Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(ii) Funkce $|f|$ má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá na intervalu I*, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta\colon\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 69. *Je-li funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$.*

Věta 70. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$.*

Věta 71. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.*