PŘÍMKY A ÚSEČKY

1. Připomeňme si různé způsoby analytického vyjádření přímky, resp. úsečky v $\mathbb{R}^2$:

- směrnicový tvar: $y = kx + q$; procházející bodem $[u, v]$: $y = k(x - u) + v$
- implicitní tvar (rovnice): $ax + by = c$, $[a, b] \neq [0, 0]$
- vektorový tvar: $\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$, neboli

$$x = u_1 + tv_1,$$
$$y = u_2 + tv_2.$$

Převod na první dva tvary: $y = u_2 + \frac{v_2}{v_1}(x - u_1)$ nebo $v_2 x - v_1 y = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

2. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ a nechť bod $\boldsymbol{c}$ leží na úsečce $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Pak $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \rho(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$.

OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, VNITŘEK, UZÁVĚR, HRANICE

3. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Ukažte, že množina $\{y \in \mathbb{R}^n;\ \rho(y, x) \leq r\}$ je uzavřená. Určete její vnitřek, uzávěr a hranici.

4. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \forall r > 0\colon B(\boldsymbol{x}, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

a $\operatorname{Int} A \cap H(A) = \emptyset$. Z toho odvoďte rovnosti

$$\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup H(A), \quad H(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A.$$

5. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že platí:

(i) $H(A) = H(\mathbb{R}^n \setminus A)$,
(ii) $\operatorname{Int} A = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$,
(iii) $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

6. Pro následující podmnožiny $\mathbb{R}$ zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
a) $\mathbb{N}$, b) $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$.

7. Pro následující množiny zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici. Dále si rozmyslete, zda jsou omezené:
a) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y > 0\}$, b) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y < \sin x\}$,
c) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \leq 0\}$, d) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) < 0\}$,
e) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 5x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 5\}$, f) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ 2 \leq xyz < 4\}$,
h) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 < x^3 + y^3 + z^3 \leq 2\}$.

SPOJITOST FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

8. Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $|\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) - \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})| \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Odtud odvoďte, že funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

9. Ukažte, že funkce $f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je spojitá na svém definičním oboru.

PARCIÁLNÍ DERIVACE

10. Pro následující funkce určete jejich definiční obor a spočtěte parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných ve všech bodech, kde existují:
a) x^y, b) $x^{(y^z)}$, c) $\sqrt{xy}$, d) $\sqrt{x^2 + y^2}$, e) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
f) $e^{x|y|}$, g) $|y - x^2|$, h) $|y - x^3|$, i) $|y^2 - x^2|$, j) $x \cdot [y]$.

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

11. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x, y, z) = xyz$, funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou dány předpisy $\varphi_1(s, t) = s + t^2$, $\varphi_2(s, t) = st$, $\varphi_3(s, t) = s$ a složená funkce $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $F(s, t) = f(\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t), \varphi_3(s, t))$. Pomocí věty o derivaci složené funkce spočtěte parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial s}$ a $\frac{\partial F}{\partial t}$.

PARCIÁLNÍ DERIVACE DRUHÉHO ŘÁDU

12. Nechť $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$ a $f(0, 0) = 0$. Spočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Aplikace věty o implicitních funkcích

13. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0:
a) $\sin(xy) + \cos(x + y) + 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [\pi, 0]$; b) $e^{xy} - \sin(x + y) = 1$, $[x_0, y_0] = [0, -\pi]$;
c) $x^2 e^{y^2} = y e^x$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$; d) $\operatorname{arctg}(y - x) + \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$;
e) $e^{(\frac{x}{y}-1)} + e^{x-y^2} = 2$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$; f) $x^y = y^x$, $[x_0, y_0] = [2, 4]$.

14. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci $z = f(x, y)$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
a) $x \sin z + y \cos z - e^z = 0$, $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, 0]$;
b) $e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = 3e^{xyz}$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$;
c) $x^{y^z} + z^{x^y} = 2y^{z^x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.

15. Dokažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^∞ na okolí bodu 0, které splňují $y(0) = z(0) = -1$ a vztahy

$$6xyz - x - 2y - 3z = 5, \qquad e^{xz} = yz.$$

Spočtěte $y'(0)$, $z'(0)$, $y''(0)$ a $z''(0)$.

16. Dokažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ třídy C^∞ na okolí bodu $[1, 1]$, které splňují $u(1, 1) = 0$, $v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ a vztahy

$$\exp\frac{u}{x} \cos\frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \qquad \exp\frac{u}{x} \sin\frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Nalezněte tečné roviny v bodech $[1, 1, 0]$, resp. $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$.

Extrémy – elementární metody

17. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
a) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 3\}$;
b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$;
c) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^3$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$;
d) $f(x, y) = x^2 + xy$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 4\}$;
e) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$, $M = \mathbb{R}^2$;
f) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+2y+1}$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$.

Extrémy – použití věty o multiplikátorech

18. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
a) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^3$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$;
b) $f(x, y, z) = yz$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$;
c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y}$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + (y - 3)^2 + z^2 \leq 1, y + z \leq 4\}$;
d) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^2, xy \geq 1\}$;
e) $f(x, y, z) = xy + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 2, xyz \geq 1, z \geq 0\}$.

Počítání s maticemi

19. Určete hodnost následujících matic (v závislosti na parametru):

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & y & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x & y \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2+|x| & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Najděte inverzní matice k následujícím maticím (v závislosti na parametru):

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2 \\ 14 & -4 & 18 & 0 \\ 12 & -4 & 16 & 0 \\ 9 & -2 & 15 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 10 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Spočtěte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -6 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}.$$

Řešení soustav lineárních rovnic

22. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ a $\boldsymbol{b}_3$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

23. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené dva vektory pravých stran $\boldsymbol{b}_1$ a $\boldsymbol{b}_2$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

24. Pro která $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ má soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ řešení? Najděte všechna řešení pro uvedený vektor pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \text{ pravá strana } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení

25. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $f(x, y, z) = [x - y, y + 3z]$. Zjistěte, je-li f lineární a případně nalezněte jeho reprezentující matici.

Vyšetřování konvergence řad

26. Pro následující řady určete, zda konvergují absolutně, konvergují neabsolutně či divergují.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)! \cdot (2n+1)! \cdot (-7)^n}{(3n)!}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n+700)!n!(-8)^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \log n, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt{n^3}}, \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+1}}, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1}\right), \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)},$$

$$\text{j) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \log\frac{1}{n}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right), \quad \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \text{m) } \sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+17n}},$$

$$\text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1}\right)\right), \quad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1} - 1},$$

$$\text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n}\right), \quad \text{q) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}, \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1} - n}{\sqrt{n^2+n} - n},$$

$$\text{s) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}, \quad \text{t) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}.$$