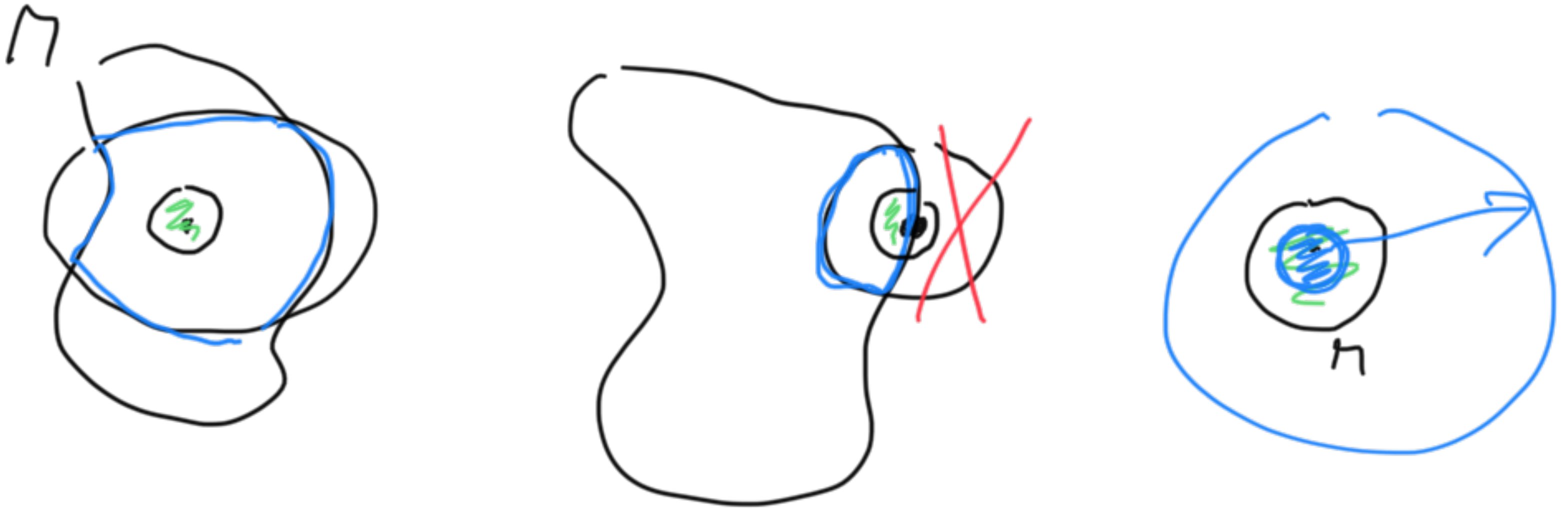
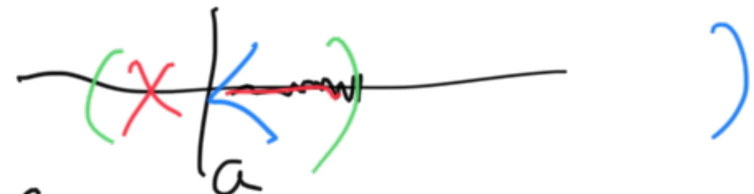
Fce n-proměnných .... fce typu $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$



$\underline{n=1}$ spojitost v a zprava $\Leftrightarrow$ spojitost vzhledem k $\langle a, +\infty)$

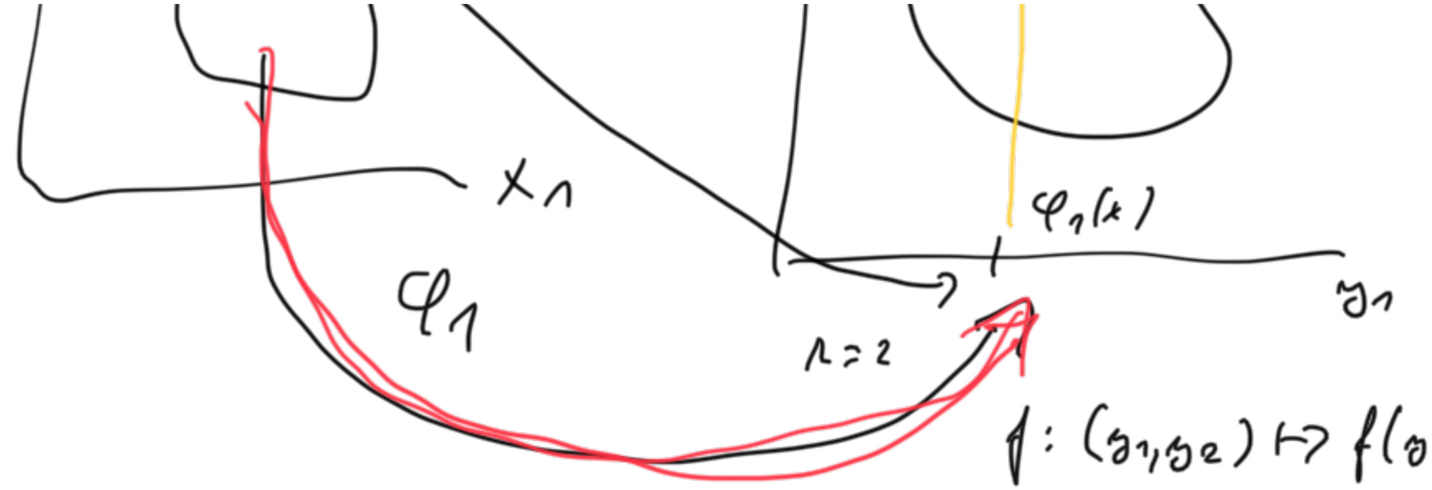
zleva $\Leftrightarrow$ vzhledem k $(-\infty, a\rangle$.



Př.: Konstantní fce jsou spojité.

$M \subset \mathbb{R}^n$ $\varphi_1: M \to \mathbb{R}$, $\varphi_2: M \to \mathbb{R}$

$f: L \to \mathbb{R}$, $L \subset \mathbb{R}^n$



$f: (y_1, y_2) \mapsto f(y_1, y_2)$

$x \in \mathbb{R}^n$

$x \mapsto \varphi_1(x) \rightsquigarrow y_1$

$x \mapsto \varphi_2(x) \rightsquigarrow y_2$

$$x \mapsto f(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$x \mapsto g(x)$ $\quad$ $y \mapsto f(y)$

$$x \mapsto f(g(x))$$

Důkaz lze provést modifikací příslušných důkazů z MI.

Jiný způsob: HEINE + VG + AL z MI.

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Zvolme libovolnou posl. $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující podm. (ii).

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak ex. $\delta > 0$, že $\forall y \in B(x,\delta) \cap M : f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$

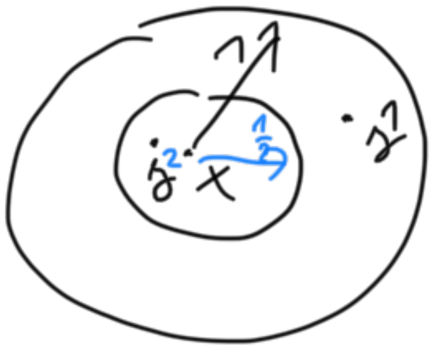
K tomuto δ ex. $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 : x^j \in B(x, \delta)$

Tedy $\forall j \geq j_0 : f(x^j) \in B(f(x), \varepsilon)$. Tudíž $f(x^j) \to f(x)$.

$$\left[\, j \mapsto x^j \mapsto f(x^j) \,\right]$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sporem. Předp., že (ii) platí a přitom

$$\exists \varepsilon > 0\ \underbrace{\forall \delta > 0\ \exists y \in B(x,\delta) \cap M : f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)}$$



$\delta > 0 \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \in B(x,\delta) \cap M \ \&\ f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$1 \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y^1$

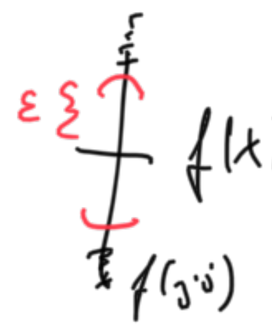
$\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y^2$

$\vdots$

$\frac{1}{j} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y^j$

$j \in \mathbb{N}$

$\vdots$



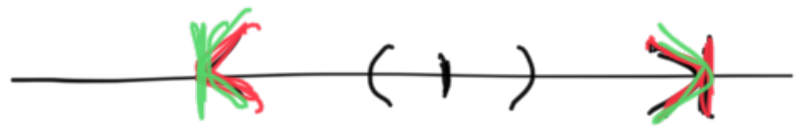
Tedy $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists \underbrace{y^j \in B(x, \tfrac{1}{j})} \cap M \ \&\ \underline{f(y^j) \notin B(f(x), \varepsilon)}$

Pak $\lim\limits_{j\to\infty} y^j = x$ $\left(0 \le \rho(y^j, x) < \frac{1}{j} \to 0\right.$, věta o 2 pol.$\left.\right)$

Dále $y^j \in M$

Ale neplatí, že $\lim\limits_{j\to\infty} f(y^j) = f(x)$. To je spor. $\square$

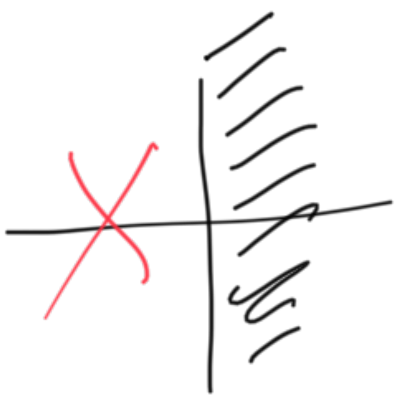
Pozn.: Dříve definovaná spojitost na intervalu je s touto novou def. v souladu:



$f(x,y) = x^2 + y^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$M = \{x \ge 0\}$

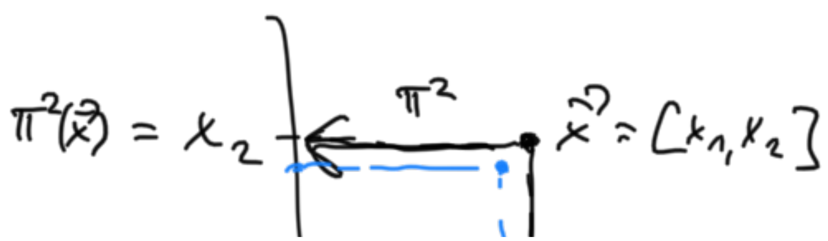


Jak dokazovat spojitost fcí více proměnných?

- V9, V10
- spojitost fcí jedné proměnné
- spojitost projekcí:

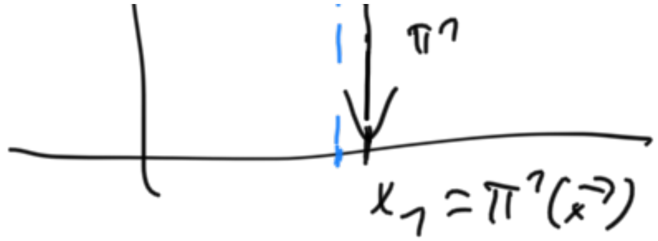
Fce $\pi^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^j(x) = x_j$, $j = \{1, \dots, n\}$

se nazývá j-tá souřadnicová projekce.



Jsou to spojité fce:

Zvolme $x \in \mathbb{R}^n$, zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \varepsilon$



… položme $\delta = \varepsilon$.

Pro $y \in B(x,\delta)$ je

$$|\pi^j(y) - \pi^j(x)| = |y_j - x_j| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} = \rho(y,x) < \delta = \varepsilon$$

Při.: Polynomy více proměnných jsou spojité.

Např. $f(x,y,z) = x^2 + 2xz - xyz = (\pi^1(x,y,z))^2 + 2\pi^1(x,y,z)\cdot\pi^3(x,y,z) - \pi^1(x,y,z)\cdot\pi^2(x,y,z)\cdot\pi^3(x,y,z)$

$\pi^1: (x,y,z) \mapsto x$

$\pi^2: (x,y,z) \mapsto y$

$\pi^3: (x,y,z) \mapsto z$

jsou spojité, dále použijeme několikrát V9

Důkaz: (i) Označme $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) < c\}$.

Zvolme $y \in M$. Chci najít $r > 0$ tak, aby $B(y,r) \subset M$.

Položím $\varepsilon = c - f(y) > 0$ $(f(y) < c)$.

Ze spojitosti f v bodě y plyne existence $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in B(y,r):\ f(x) \in B(f(y),\varepsilon),$$

neboli

$$f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon = c \Rightarrow x \in M$$

takže $B(y,r) \subset M$.

(ii) Fce $g = -f$ je spojitá (V4) a $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > c\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ -f(x) < -c\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n;\ g(x) < -c\}$ dle (i) otevřená

(iii) z (ii) a z V5

(iv) z (i) a z V5

(v) $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = c\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \leq c\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \geq c\}$ ... uzav.

uzavřené z (iii) a (iv) V6 (ii)

$\square$