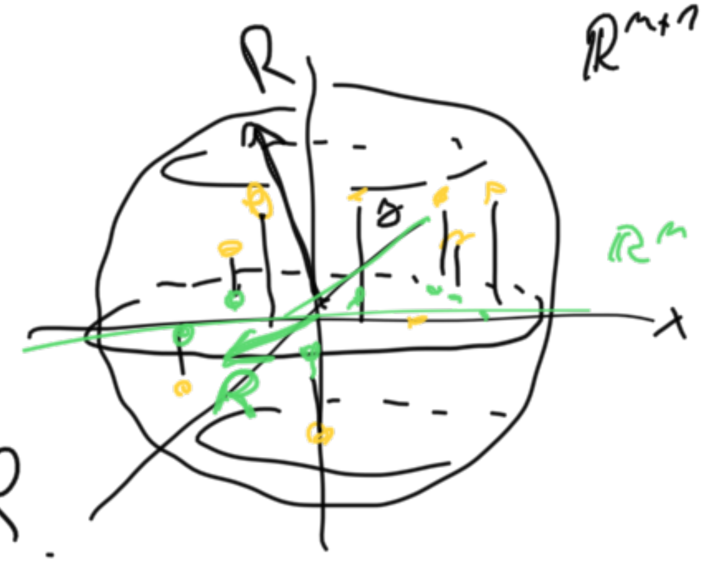
Důkaz 4.14: Indukcí dle n.

Pro $n=1$ je to Bolzanova-Weierstrassova věta.

indukční krok: Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou omezenou posloupnost v $\mathbb{R}^n$. Nechť $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ je omezená posl. v $\mathbb{R}^{n+1}$, tj. ex. $R>0$ takové, že $\forall j \in \mathbb{N}: x^j \in B(o,R)$.

$$x^j = [\underbrace{x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j}_{y^j}, x_{n+1}^j] \in \mathbb{R}^{n+1}$$



Označme $y^j = [x_1^j, \dots, x_n^j] \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$.

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí, že $\rho(o, y^j) \le \rho(o, x^j) < R$.

$$\rho(o,y^j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k^j)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^j)^2}, \qquad \rho(o,x^j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} (x_k^j)^2}$$

Posl. $\{y^j\}_{j=1}^{\infty}$ je tedy omezená v $\mathbb{R}^n$.

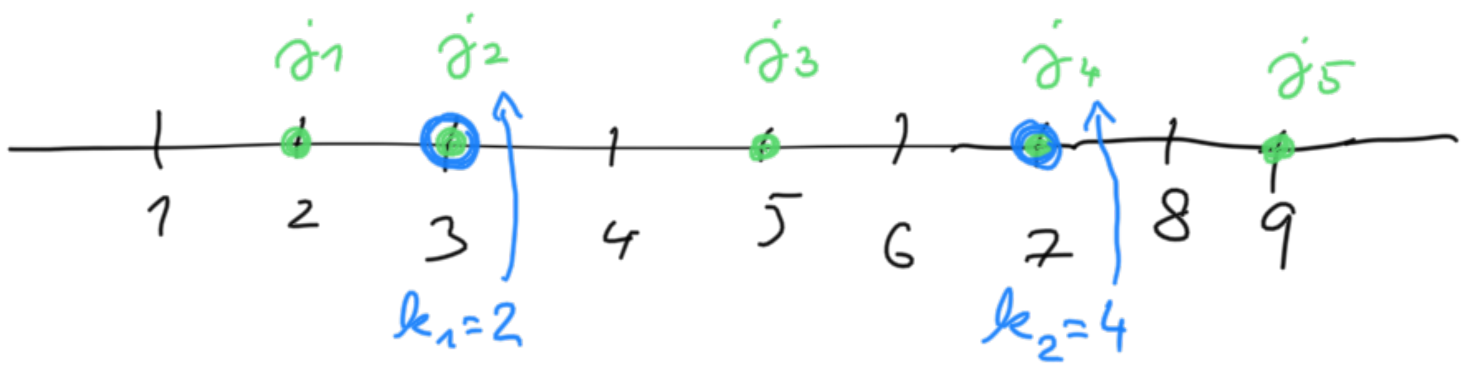
Dle indukčního předpokladu lze z posl. $\{y^j\}_{j=1}^{\infty}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$,

$\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rost. posl. přirozených čísel

$$x^{j_k} = [\underbrace{x_1^{j_k}, x_2^{j_k}, \dots, x_n^{j_k}}_{y^{j_k}}, x_{n+1}^{j_k}]$$

Dále pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $|x_{n+1}^{j_k}| \le \rho(o, x^{j_k}) < R$, takže posl. reálných čísel $\{x_{n+1}^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená.

Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n+1}^{j_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$.



Pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$ je posl. reálných čísel $\{y_l^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$

konvergentní (V4). Podle věty o limitě vybrané ...

je $\underbrace{\{y_{\ell}^{j_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}}_{\text{vybraná}}$ konvergentní.

Protože $x^{j_{k_i}} = [y_1^{j_{k_i}}, \dots, y_n^{j_{k_i}}, x_{n+1}^{j_{k_i}}]$,

je podle V4 posl. $\{x^{j_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergentní v $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Důkaz V13: „$\Rightarrow$" uzavřenost: Použijeme V5.

Nechť $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ je posl. prvků množiny M taková, že $x^j \to x \in \mathbb{R}^n$.

Dle předp. existuje posl. vybraná $\{x^{j_k}\}$ taková, že $x^{j_k} \to y \in M$.

Podle V4 a věty o limitě vybrané posl. je $y = x$, tj. $x \in M$.

Takže M je uzavřená dle V5.

omezenost: Sporem. Předp., že M není omezená.

Pak $\forall j \in \mathbb{N}$ existuje $x^j \in M \setminus B(o, j)$.

Z posl. $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ lze vybrat konvergentní posl. $\{x^{j_k}\}$

… $y \in \mathbb{R}^n$. Pak

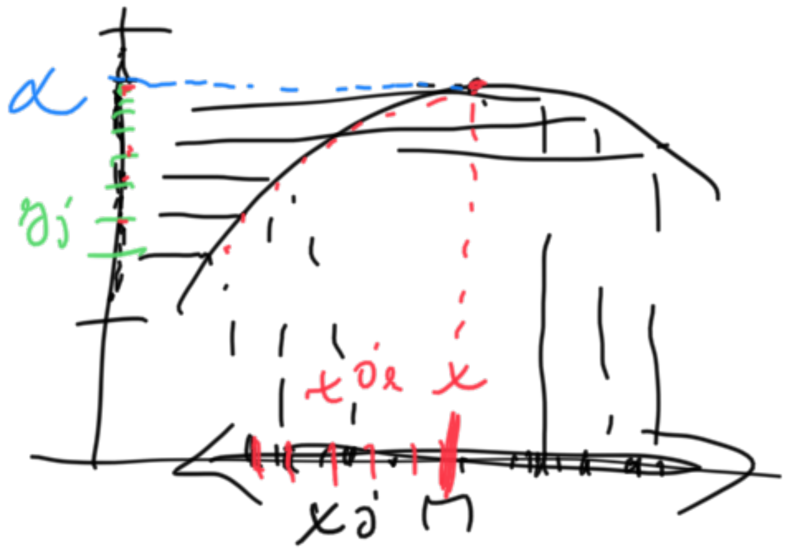
$$\underbrace{j_k}_{\xrightarrow{k\to\infty} +\infty} \le \rho(x^{j_k}, o) \le \underbrace{\underbrace{\rho(x^{j_k}, y)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + \rho(y, o)}_{\xrightarrow{k\to\infty} \rho(y,o) \in \mathbb{R}},$$

což je spor s větou o limitě a uspořádání.

„$\Leftarrow$" Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená.
Nechť $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ je libovolná posl. prvků množiny M.
Tato posl. je omezená $\overset{L14}{\Longrightarrow}$ lze vybrat konvergentní podposl. $\{x^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Tedy $\lim_{k\to\infty} x^{j_k} = x \in \mathbb{R}^n$. Podle V5 je $x \in M$. $\square$

Př.:
- uzavřené intervaly v $\mathbb{R}$ jsou kompaktní
- konečná sjednocení uzavřených intervalů v $\mathbb{R}$ jsou kompaktní
- interval $(0,1)$ není kompaktní v $\mathbb{R}$

Důkaz:



Označme $\alpha = \sup f(M)$ $\left(= \sup\{f(x);\ x \in M\}\right)$

(obecně $\alpha \in \mathbb{R}^*$).

Podle L16 RMI existuje posl. $\{y_j\}$ prvků množiny $f(M)$ takové, že $\lim y_j = \alpha$.

Pro $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists x^j \in M$: $f(x^j) = y_j$.

M je kompaktní $\Rightarrow$ existuje podposloupnost $\{x^{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k $x \in M$.

Fce f je spojitá v x vzhledem k M, takže dle Heineovy věty (V11) je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{j_k}) = f(x)$. Zároveň $\{f(x^{j_k})\} = \{y_{j_k}\}$ je vybraná z posl $\{y_j\}$, takže dle věty o limitě vybrané posl. je $\lim f(x^{j_k}) \overset{!}{=} \lim y_j = \alpha$

Podle věty o jednoznačnosti limity je $f(x) = \alpha = \sup f(M)$.

Tedy bod x je bodem maxima f na M.

Existence bodu minima analogicky nebo přechodem k fci $-f$. $\square$