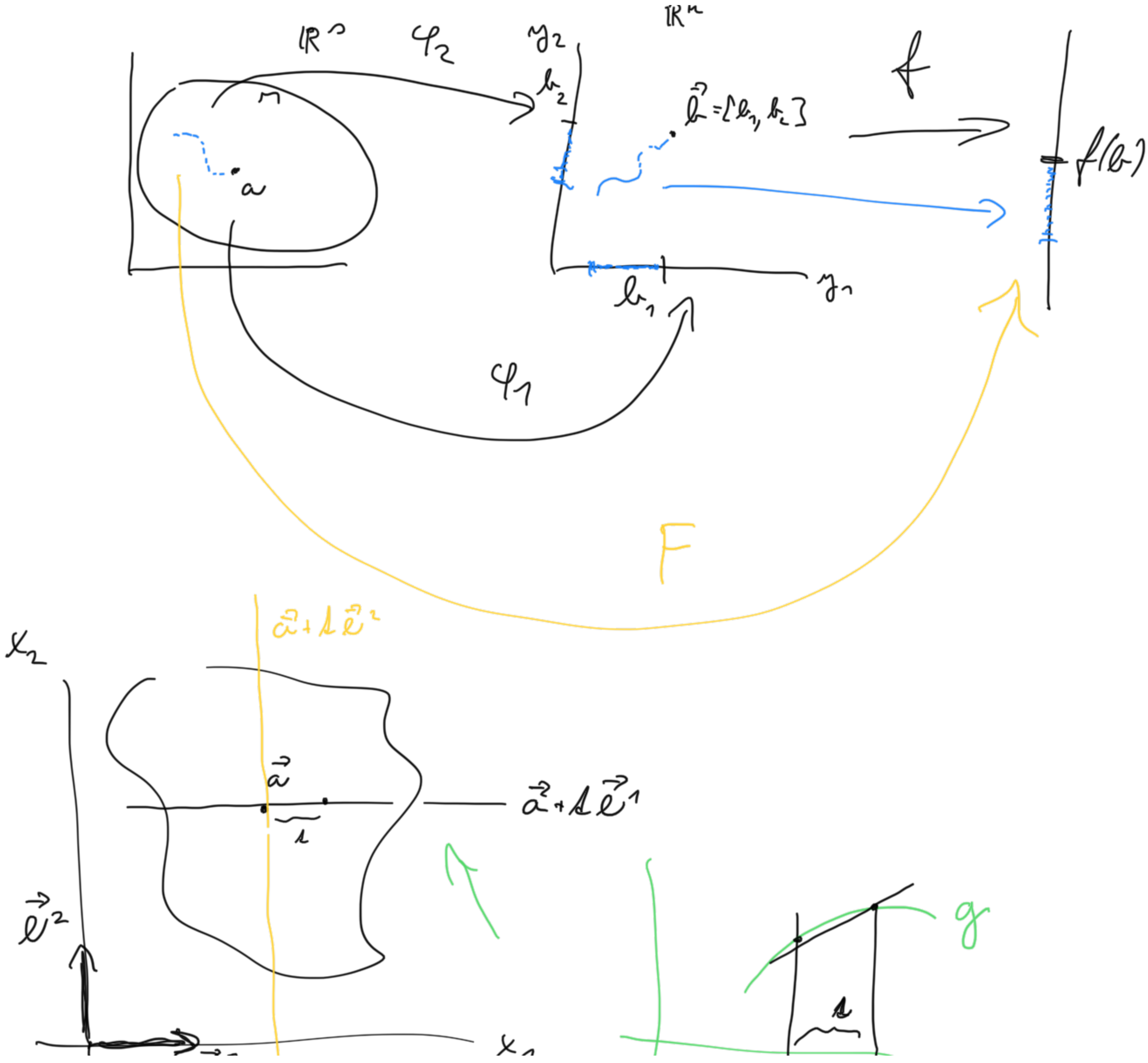


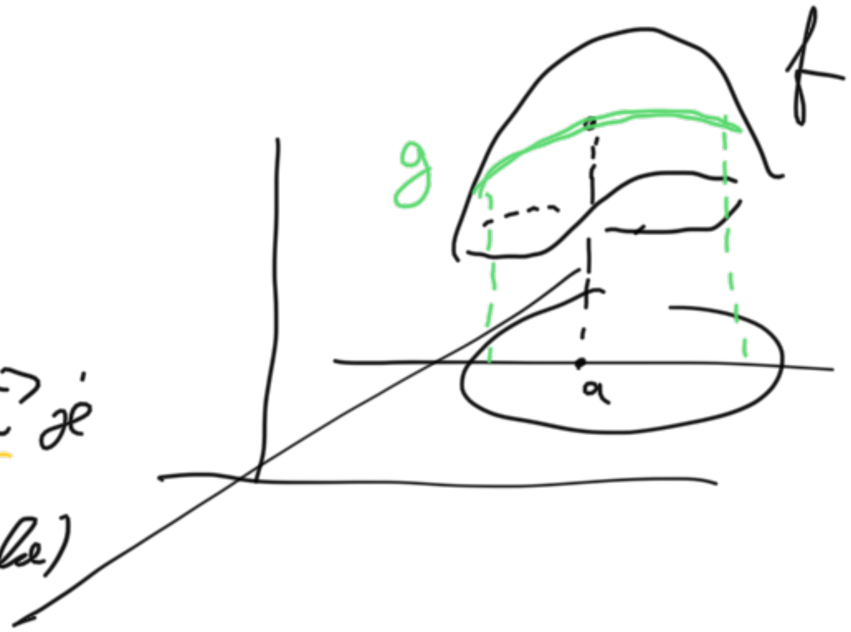
$\mathbb{R}^n$
φ_2
y_2
$\mathbb{R}^n$
b_2
$\vec{b} = [b_1, b_2]$
f
$f(b)$
a
b_1
y_1
φ_1
F
$\vec{a} + s\vec{e}^2$
x_2
$\vec{a}$
$\vec{a} + s\vec{e}^1$
s
$\vec{e}^2$
x_1
g
s

$\vec{e}_1$ a_1 a_1+t x_1

<u>Pozn.:</u> • „x_j" značí derivaci dle j-té proměnné, např. pro fci $f(x,y,z)$ píšeme $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

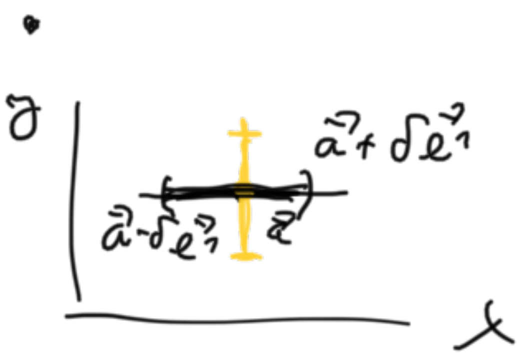
• Položme $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

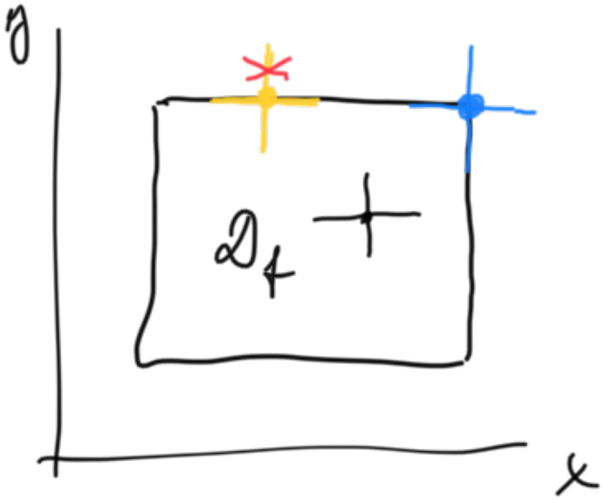


parc. der. fce f dle j-té proměnné v bodě $\vec{a}$ je vlastně obyčejná derivace „řezu" (parciální funkce) g v bodě a_j:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_j + t) - g(a_j)}{t} = g'(a_j)$$



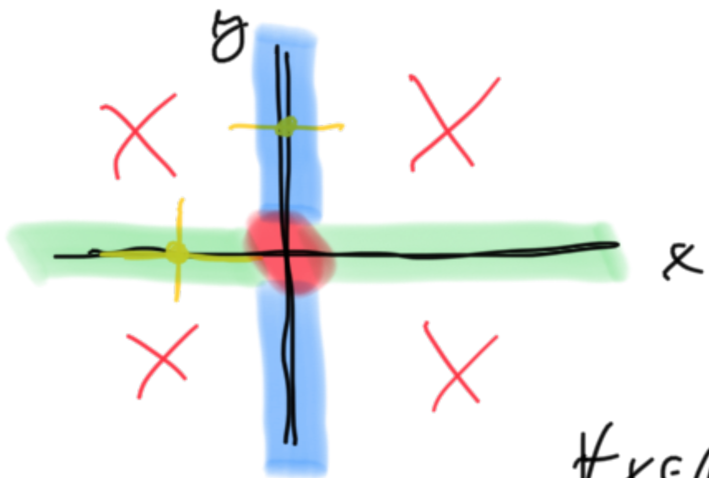
• Pokud má j-tá parc. derivace v bodě $\vec{a}$ existovat, pak musí být j-tá parc. fce definovaná na okolí bodu a_j, tj. musí existovat $\delta > 0$, že f je definovaná na úsečce $\{\vec{a} + t\vec{e}_j : t \in (-\delta, \delta)\}$



- Pro počítání parc. derivací používáme znalosti o derivacích fce jedné proměnné.

Př.: $f(x,y)=\sqrt{-x^2y^2}$

$D_f=\{[x,y];\ x=0 \vee y=0\}$



$f\equiv 0$ na D_f

$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\vec{a}=[x,0]$ | $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$ $\forall y\in\mathbb{R}$

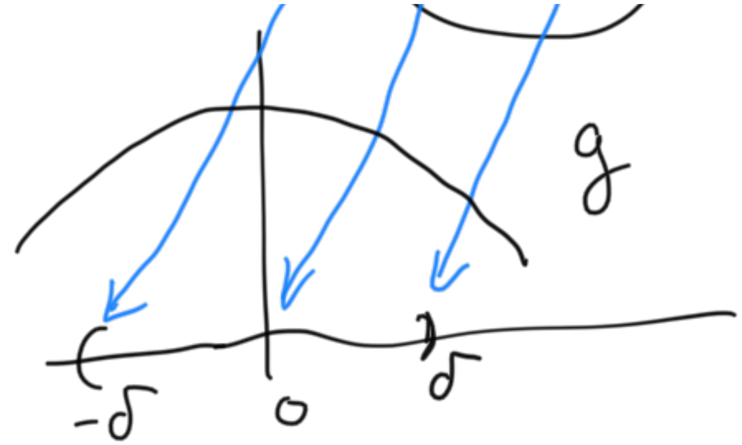
Důkaz: Zvolme $j\in\{1,\dots,n\}$ pevné.

Položme $g(t)=f(\vec{a}+t\vec{e}^{\,j})$.

Fce g je definovaná na okolí 0

a má v 0 lokální extrém.

... v 0 lokální extrém.



$\Rightarrow$ $g'(0)$ neexistuje nebo je rovna 0.

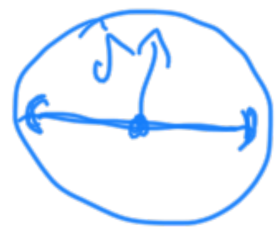
V40 z MI

ale $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ (pokud alespoň jedna existuje).

f má v $\vec{a}$ lok. max: $\exists \delta > 0 : \forall x \in B(\vec{a}, \delta) : f(x) \le f(\vec{a})$

$t \in (-\delta, \delta)$: $\vec{a} + t\vec{e}_j \in B(\vec{a}, \delta) \Rightarrow g(t) = f(\vec{a} + t\vec{e}_j) \le f(\vec{a}) = g(0)$,

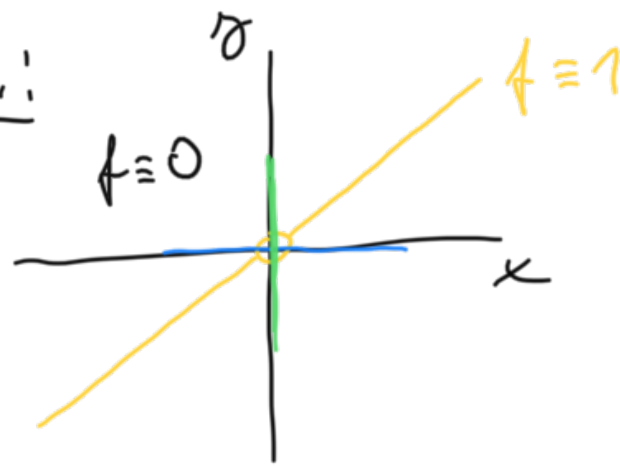
$\rho(\vec{a} + t\vec{e}_j, \vec{a}) = \rho(t\vec{e}_j, o) = |t|\,\rho(\vec{e}_j, o) = |t| < \delta$



tj. g má v 0 lok. max.

$\square$

Př.:

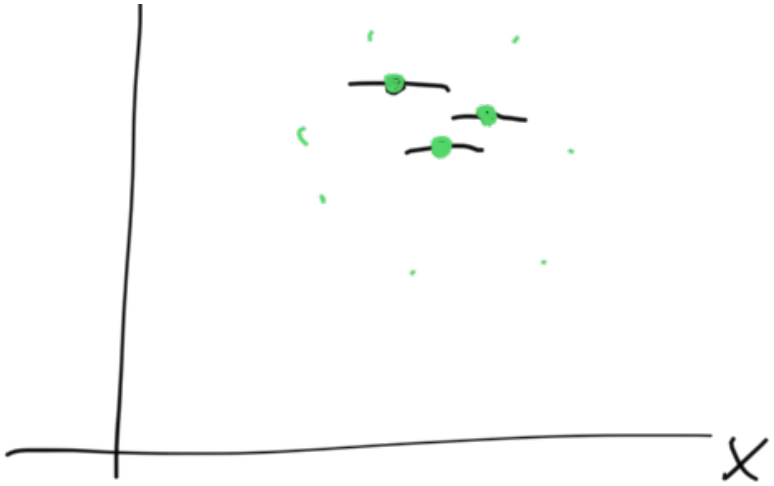


$f(a,a) = 1$ pro $a \neq 0$

$f(x,y) = 0$ všude jinde

f není spojitá v o, ale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$n = 1$



f, g : f', g' jsou spojité na G

$(f+g)' = f' + g'$ ... spojitá na G

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ ... spojitá na G

spojitá na G (mají vl. derivaci)