Pozn.: gradient v bodě a určuje „směr největšího růstu" fce f v bodě a:

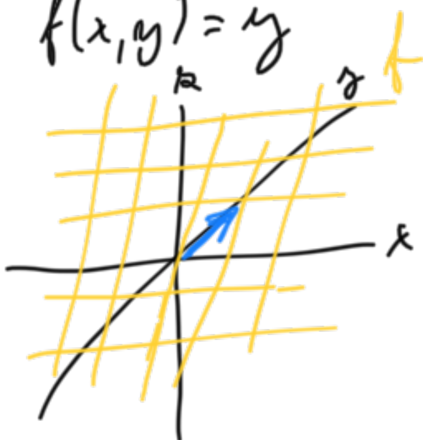
Pokud $\nabla f(a) \neq o$ a $\vec{v} \in R^n$, $\vec{v} \neq \nabla f(a)$ & $\underbrace{\rho(\nabla f(a), o) = \rho(v, o)}$,

vektory $\vec{v}$ a $\nabla f(a)$ mají „stejnou velikost"

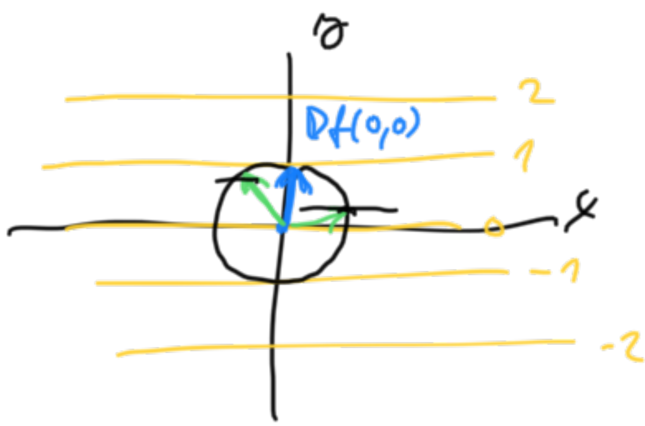
pak $\exists \delta > 0$ takové, že

$$\forall t \in (0, \delta): \underline{f(a + t\nabla f(a)) > f(a + t\vec{v})}$$

$f(x,y) = y$



$\nabla f(x,y) = [0,1]$



Lze ukázat, že ve směru kolmém ke gradientu se fce mění s „nulovou rychlostí".

(vektor $\nabla f(a)$ je „kolmý" k vrstevnici)

$G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f: G \to \mathbb{R}$

Vezmeme $i \in \{1, \dots, n\}$. Předp., že $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existuje v každém bodě G (konečná).

Potom fce $\vec{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ je fce n proměnných def. na G.

Můžu tedy zkoumat její parc. derivace.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \left.\begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \quad (\text{spojitost } f, \text{ limita } g') \end{cases}\right\} = 2|x|, \; x \in \mathbb{R}$$

f' nemá derivaci v $0 \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$, $f \notin C^2(\mathbb{R})$

Důležitá úloha – hledání extrémů fce f na $K \subset \mathbb{R}^n$.

Př.: 2 suroviny A, B, x je množství suroviny A stojí $\sqrt{x}$
y … B … $\sqrt{y}$

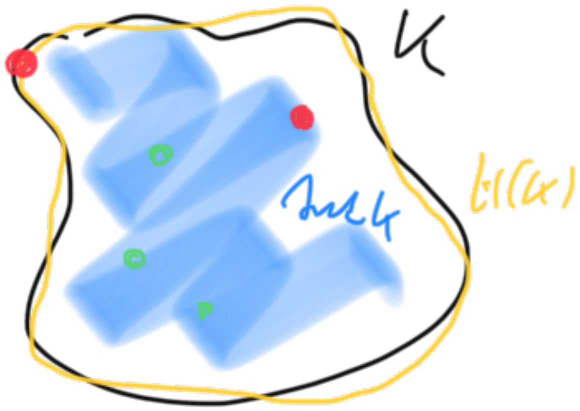
zisk $f(x,y)$ (např.: $f(x,y) = 4x^2 + 2yx + 3y$)

Máme k dispozici P prostředků, chci maximalizovat zisk, tj.
hledáme max f na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq P\}$

Často K je $\underbrace{\text{omezená a uzavřená}}$ a f je spojitá na K a $f \in C^1(\text{Int}\, K)$.

kompaktní (V13)

Dle V15 úloha má řešení (existuje bod maxima f v K).



$K = \operatorname{Int} K \cup H(K)$, navíc $\operatorname{Int} K \cap H(K) = \emptyset$

A) Hledám body maxima f vzhledem k $\operatorname{Int} K$.

B) Hledám body max. f vzhledem k $H(K)$.

(je-li $x_0 \in \operatorname{Int} K$ bod maxima f na K, pak je to i bod maxima vzhledem k $\operatorname{Int} K$ apod.)

A) použiji V17: je-li v $x_0 \in \operatorname{Int} K$ bod maxima, pak x_0 je krit. bod pro f (tj. $\nabla f(x_0) = 0$)

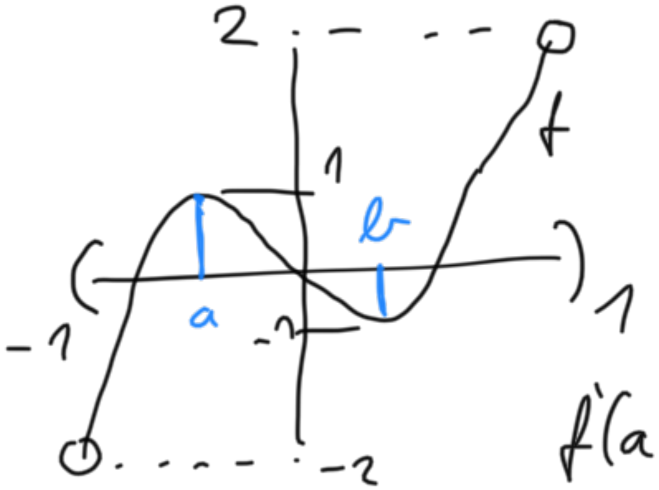
– najdu vš. kritické body na $\operatorname{Int} K$ ... body tzv. „podezřelé z extrému"

B) K nalezení bodů podezřelých z extrému" lze použít buď to konkrétní metodu v závislosti na tvaru K, nebo existuje obecný postup (tzv. Lagrangeova věta o multiplikátorech).

Na závěr porovnám funkční hodnoty v „podezřelých bodech";

největší ... max f na K, nejmenší ... min f na K.

Pozor: použití V15 je PODSTATNÉ:



$M = (-1, 1)$

f nemá na M ani max., ani min.

$f'(a) = f'(b) = 0$ ... body podezřelé z extrému a, b

$f(a) = 1$, $f(b) = -1$

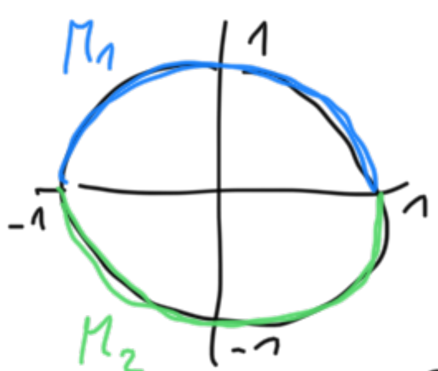
↓ max ↓ min

ŠPATNĚ

Př.: $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3$ ... spoj. fce, kompaktní množina ⇒ úloha má řešení

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

hledám extrémy f na M



$\operatorname{Int} M = \{x^2 + y^2 < 1\}$

$H(M) = \{x^2 + y^2 = 1\}$

A) na Int M

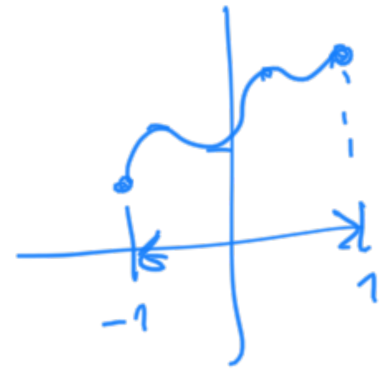
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y^2$

$\nabla f(x,y) = [6x, 12y^2] = 0 \iff x = 0 \;\&\; y = 0$

bod $[0,0]$ ... podezřelý z extrému

B) na H(M)

$$M_1 = \{ y = \sqrt{1-x^2} ; x \in \langle -1, 1 \rangle \}$$
$$M_2 = \{ y = -\sqrt{1-x^2} ; x \in \langle -1, 1 \rangle \}$$



dosadím do f:

na M_1

$$g_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = 3x^2 + 4(1-x^2)^{\frac{3}{2}} , x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$g_1'(x) = 6x + 6(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 6x(1 - 2\sqrt{1-x^2}) , x \in (-1, 1)$$

$= 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}$

$1 - x^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{3}{4}$

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

body podezřelé z extrému:

$[-1, 0]$

$[1, 0]$

$[0, 1]$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$

na M_2:

$$g_2(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = 3x^2 - 4(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$g_2'(x) = 6x - 6(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x) = 6x(1 + \sqrt{1-x^2}), x \in (-1, 1)$$

$= 0 \Leftrightarrow x = 0$

další body podezřelé z extrému: $[-1, 0], [1, 0]$,

$[0, -1]$

$f(0,0) = 0$

$f(\pm 1, 0) = 3$

$f(0,1) = 4$ max

$f(0,-1) = -4$ min

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$
