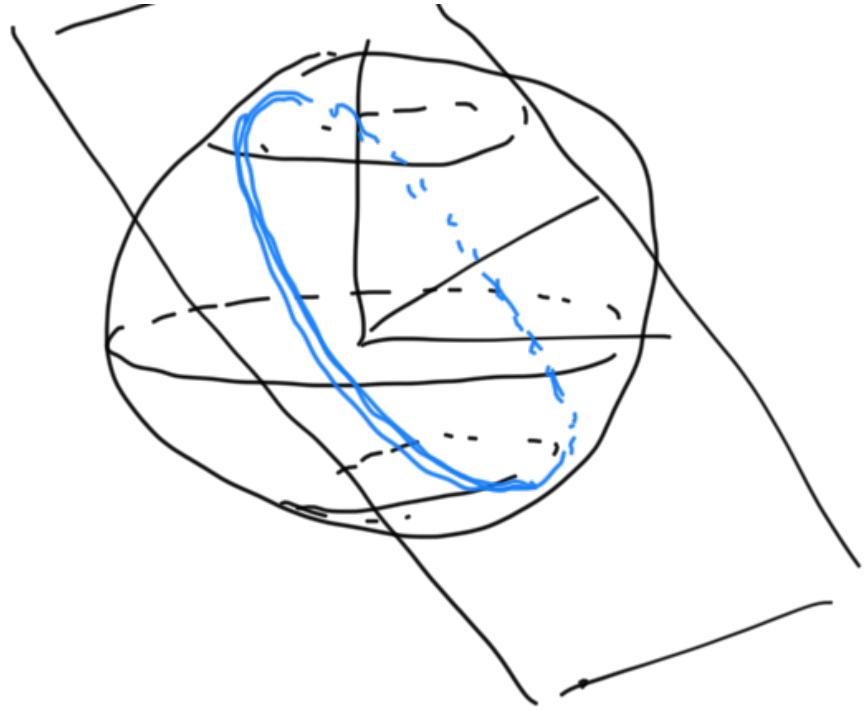
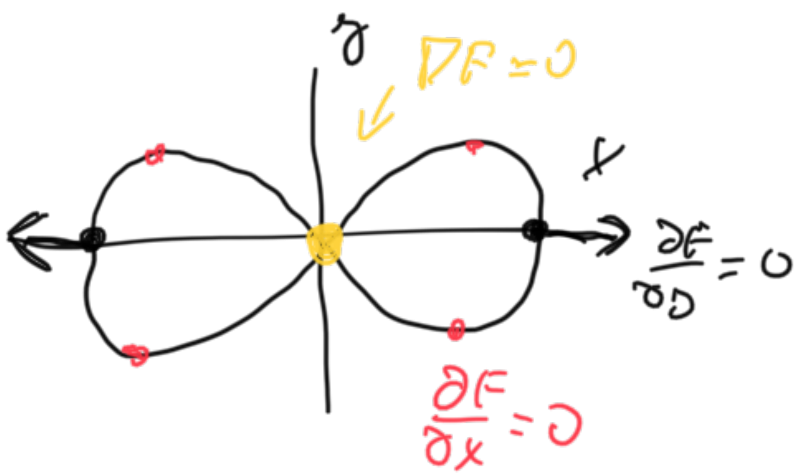
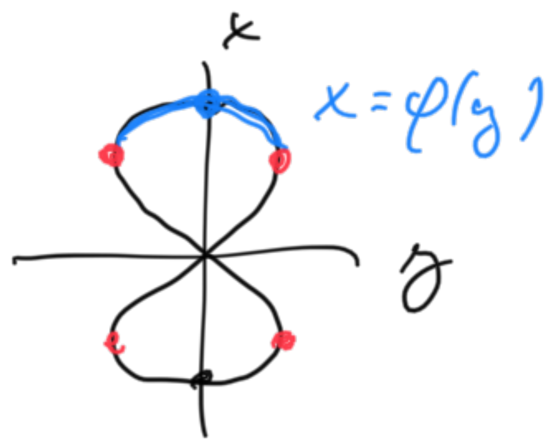
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x+y+z=0$$



Pozn.: • Rovnici $g(x,y)=0$ se říká „vazbová podmínka", fci g se říká „vazbová funkce".

• Číslu λ se říká „multiplikátor" nebo „Lagrangeův multiplikátor".





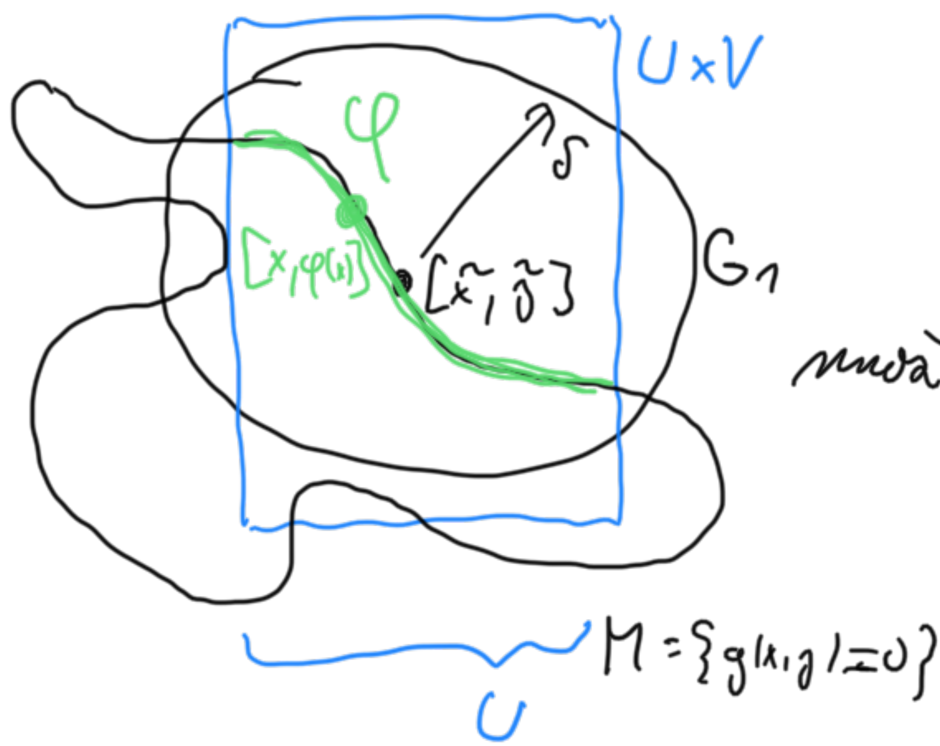
(II) $\nabla f(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda \nabla g(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, tj. $\nabla f(\tilde{x},\tilde{y}) = -\lambda \nabla g(\tilde{x},\tilde{y})$, vektor vektor

neboli ∇f je nějakým násobkem ∇g

<u>Důkaz</u>: Budeme předpokládat, že neplatí (I), ukážeme, že pak nutně platí (II).

BÚNO $\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ (jinak by byl důkaz byl stejný, pouze by se prohodily role x a y).

Nechť $\delta > 0$ je takové, že f má v $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ extrém na množině $M \cap B([\tilde{x}, \tilde{y}], \delta)$.



Označme $G_1 = B([\tilde{x}, \tilde{y}], \delta)$.

Použijí větu o impl. fci (V23) na množinu G_1, fci $g|_{G_1}$ a bod $[\tilde{x}, \tilde{y}]$.

Tedy existují okolí U bodu $\tilde{x}$ a okolí V bodu $\tilde{y}$ a fce $\varphi : U \to V$ taková, že

- $G_1 \cap M \cap (U \times V) = \text{graf}\, \varphi$,
- $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

• $\varphi \in C^1(U)$.

Budeme zkoumat f na grafu φ:

Definujme $h: U \to \mathbb{R}$ jako $h(x) = f(x, \varphi(x))$.

Má-li f v $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ maximum na $G_1 \cap M$, pak $\forall x \in U$:

$$h(x) = f(\underbrace{x, \varphi(x)}_{\in G_1 \cap M}) \leq f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) = h(\tilde{x}),$$

neboli h má v $\tilde{x}$ maximum na U. Pro minimum obdobně.
Tedy h má v $\tilde{x}$ extrém na U.

Dále $h \in C^1(U)$ ($+ V21$), takže $\underline{h'(\tilde{x}) = 0}$ (nutná podm. lok. extrému z MI)

Dle V21 je $h'(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \cdot \varphi'(\tilde{x}) = 0.$

Navíc z V23: $\varphi'(\tilde{x}) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))}$, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})} = 0$$

$=: \lambda$

Položíme-li $\underbrace{\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})}}_{\text{upravíme:}}$, pak je 1. rovnice ve (II) splněna.

$\lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) = -\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})$, což je 2. rovnice ve (II).

$\square$