Důkaz: (i)

$$\underbrace{A(\underbrace{\overbrace{BC}^{D}}_{\in M(n\times l)})}_{\in M(m\times l)} = \underbrace{(\underbrace{\overbrace{AB}^{F}}_{\in M(m\times k)})\cdot C}_{\in M(m\times l)}$$

tj. vlevo i vpravo matice stejného typu

Označme $D = BC$, $D = (d_{sj})_{\substack{s=1..n\\ j=1..l}}$, kde $d_{sj} = \sum_{t=1}^{k} b_{st} c_{tj}$.

Pak $A(BC) = AD$, tedy prvek s indexem ij matice $A(BC)$ je roven

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} d_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{t=1}^{k} b_{st} c_{tj} \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{k} a_{is} b_{st} c_{tj} \right)$$

$i \in \{1, \dots, m\}$
$j \in \{1, \dots, l\}$.

Označme dále $F = AB$, $F = (f_{it})_{\substack{i=1..m\\ t=1..k}}$, $f_{it} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{st}$.

Pak $(AB)C = FC$, tedy prvek s indexem ij matice $(AB)C$ je roven

$$\sum_{t=1}^{k} f_{it} c_{tj} = \sum_{t=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{st} \right) \cdot c_{tj} = \sum_{t=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{st} c_{tj} \right).$$

$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12})+(a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22})$

$(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21})+(a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22})$

Jako čísla jsou stejná díky asoc. a komutativitě sčítání $\mathbb{R}$ čísel.

(ii)

$$\underbrace{A\underbrace{(B+C)}_{M(n\times k)}}_{\in M(m\times k)} = \underbrace{\underbrace{AB}_{\in M(m\times k)}+\underbrace{AC}_{\in M(m\times k)}}_{\in M(m\times k)}$$

Prvek s indexem ij matice $A(B+C)$ je roven

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}(b_{sj}+c_{sj}) = \underbrace{\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}}_{\text{prvek } ij \text{ matice } AB} + \underbrace{\sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj}}_{\text{prvek } ij \text{ matice } AC}$$

$i\in\{1,\dots,m\}$
$j\in\{1,\dots,k\}$

(iii) podobně jako (ii)

(iv) Matice $I=(b_{ij})_{i,j=1\dots n}$, kde $b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{pro } i=j\\ 0 & \text{pro } i\neq j\end{cases}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & & 1 & \\ \vdots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

splňuje $\forall A\in M(n\times n):\ AI=IA=A$:

Prvek ij matice AI: $\sum_{s=1}^{n} a_{is}\underbrace{b_{sj}}_{\substack{\neq\\ 0 \\ \text{jen pro } s=j}} = a_{ij}b_{jj} = a_{ij}\cdot 1 = a_{ij}$

$A=J$

Jednoznačnost: Nechť $J\in M(n\times n)$, že $\forall A\in M(n\times n)$: $AJ=JA=A$

Pak $I = I \cdot J = J$.

(v) Prvek ij matice $(\lambda A)B$ je roven $\sum_{s=1}^{m} (\lambda a_{is}) b_{sj}$.

— " — $A(\lambda B)$ — " — $\sum_{s=1}^{m} a_{is} (\lambda b_{sj})$.

— " — $\lambda(AB)$ — " — $\lambda \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sj}$.

Všechna 3 čísla jsou stejná díky asoc. a distributivitě $\mathbb{R}$ čísel. $\square$

Pozn.: • Maticové nás. není komutativní.

Např. pro $A \in M(2\times 3)$, $B \in (3\times 4)$, pak AB je definovaný, ale $B \cdot A$ není def.

Nás. není komutativní ani pro čtvercové matice stejného řádu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \text{ ale } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\neq$

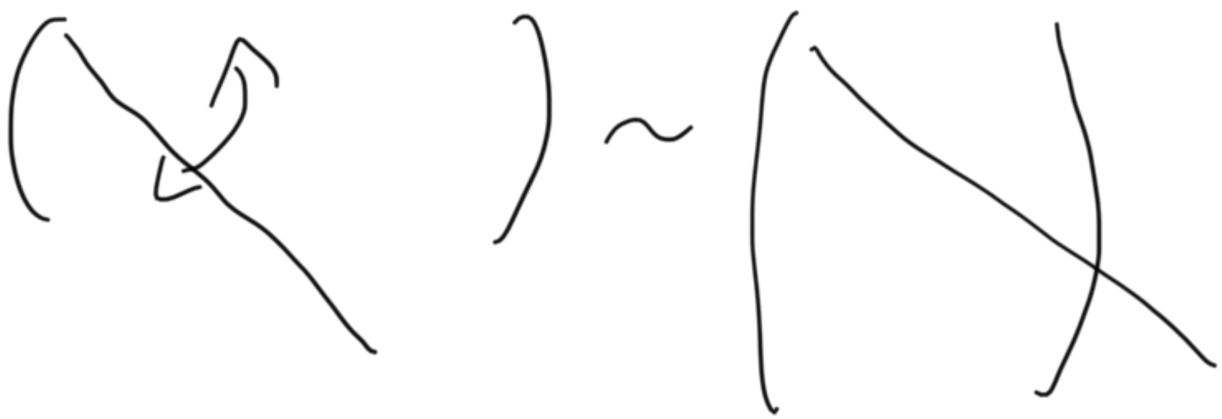
nebo $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

• Jednotková matice by se měla značit spíš $I_n \in M(n\times n)$.

Obvykle ale to nevadí, protože z kontextu je jasné, jaký řád má.

- $\forall B \in M(m \times n): \; B \cdot I = B$

  $\forall C \in M(n \times k): \; I \cdot C = C$



Důkaz: (i) a (ii) jasné

(iii) $A = (a_{js})_{\substack{j=1..m \\ s=1..n}}$, $B = (b_{si})_{\substack{s=1..n \\ i=1..k}}$

$A^T = (c_{pq})_{\substack{p=1..n \\ q=1..m}}$, $B^T = (d_{rp})_{\substack{r=1..k \\ p=1..n}}$

$AB \in M(m \times k)$, $\underbrace{(AB)^T}_{\in M(k \times m)}$

$B^T A^T \in M(k \times m)$, tedy

typy matic sedí!

Prvek ij matice $(AB)^T$ je prvek ji matice AB, tedy je to

$$\sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si} \, ,$$

Prvek ij matice B^TA^T je roven

$$\sum_{p=1}^{n} d_{ip}\, c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} b_{pi}\, a_{jp} = \sum_{p=1}^{n} a_{jp}\, b_{pi}$$

□

Pro $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, pak existuje právě 1 $b\in\mathbb{R}$: $ab=ba=1$ $(b=a^{-1})$,

(… řešení $ax=c$)

Analogie pro matice: $A\in M(n\times n)$, existuje $B\in M(n\times n)$: $AB=BA=I$?

↓ čtvercová proto, aby bylo def. AB i BA

Obecně ne: K matici $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ taková neexistuje: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\0&0\end{pmatrix}\neq I$

K matici $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ také ne.

Předpokládejme $AB=BA=I$, $AC=CA=I$. Pak $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$.

Důk.: (i) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

(ii) ověříme, že $(A^T) \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T = I$:

$$A^T \cdot (A^{-1})^T \underset{V35(iii)}{=} (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I,$$

$$(A^{-1})^T A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I.$$

(iii) ověříme, že $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = I$:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

asoc. náš.

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I.$$

$\square$

Pozn.: Pozor, sčítání nezachovává regularitu: $(I + (-I)) = O$

není regulární!