Motivace: soustava $x + y = 1$

$\cdot 2$ $\quad 2x + 2y = 2$ $\quad$ nekonečně řešení $(y = 1 - x)$

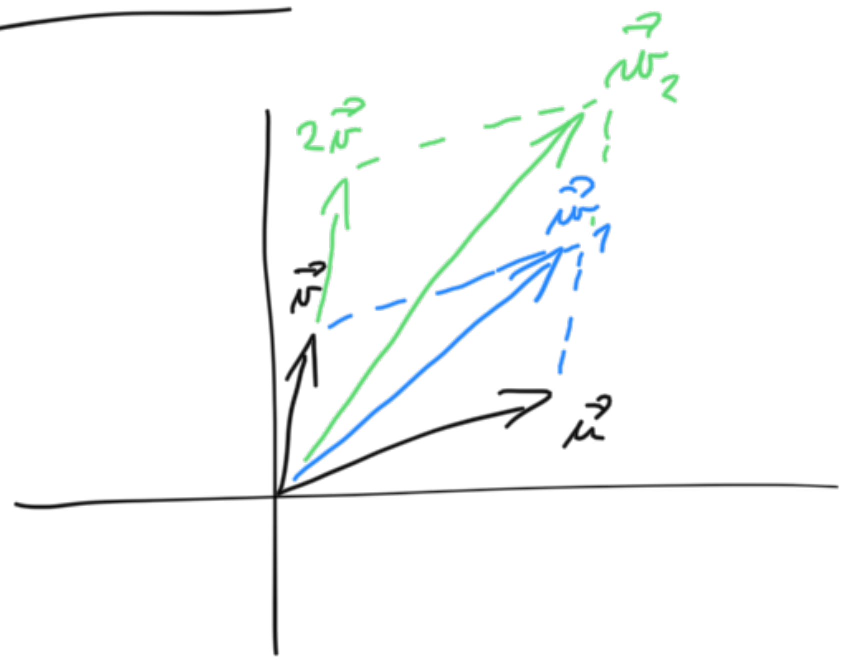
tato rovnice je „zbytečná“

soustava

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ 2y + z &= 1 \\ 2x \quad - z &= 1 \end{aligned}$$

$\leftarrow 2 \cdot$ (první rovnice) $-$ (druhá rovnice)

Jak poznat, které rovnice jsou „nadbytečné“?

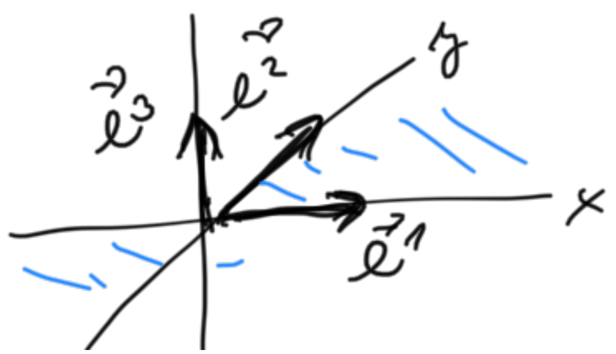


$\vec{w}_1 = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$

… $\vec{w}_1$ je LK vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

$\vec{w}_2$ — " —

$= 1 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$

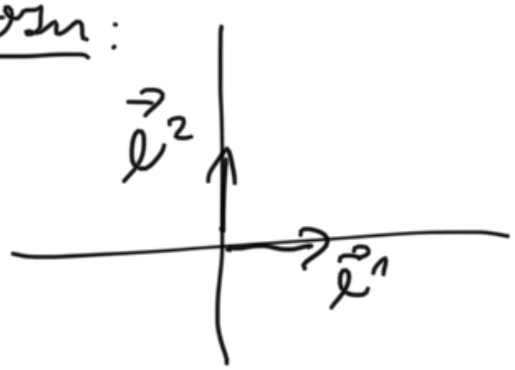


$\vec{e}^3$ není LK vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

$$\boxed{\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2} = \alpha[1,0,0] + \beta[0,1,0] = [\alpha, \beta, 0] \neq \underbrace{[0,0,1]}_{= \vec{e}^3}$$

vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ „určují" rovinu (rovinu „xy")

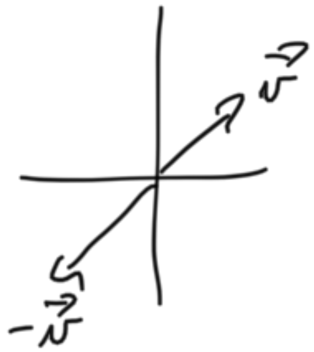
Pozn.:



$\vec{e}^1, \vec{e}^2$ jsou LN:

jestliže $\lambda_1 \vec{e}^1 + \lambda_2 \vec{e}^2 = o$, pak

$$\lambda_1 \vec{e}^1 + \lambda_2 \vec{e}^2 = \lambda_1[1,0] + \lambda_2[0,1] = [\lambda_1, \lambda_2] = [0,0] \iff \lambda_1 = 0 \ \& \ \lambda_2 = 0$$



$\vec{v}, -\vec{v}$ jsou LZ: $\underbrace{1\cdot\vec{v} + 1\cdot(-\vec{v})}_{\text{netriviální LK}} = \vec{v} + (-\vec{v}) = o$

- nulový vektor je LZ: $\underbrace{1\cdot o}_{\text{netriv. LK}} = o$

nenulový vektor je LN: $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{v}\neq o$, tj. $\vec{v} = [v_1,\dots,v_n]$, $\exists j \in \{1,\dots,n\}$: $v_j \neq 0$

Pokud $\lambda\cdot\vec{v} = o$

$$\lambda\cdot\vec{v} = \lambda\cdot[v_1,\dots,v_n] = [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n] \Rightarrow \lambda\cdot v_j = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

- Je-li jeden z vektorů $v^1, \dots, v^k$ nulový, pak jsou LZ:

  Pokud $v^j = o$, pak stačí vzít:

$$\underbrace{0\cdot v^1 + 0\cdot v^2 + \dots + 1\cdot v^j + \dots + 0\cdot v^k}_{\text{netriv. LK}} = 1\cdot o = o$$

- Jsou-li alespoň 2 z vektorů $v^1, \dots, v^k$ shodné, pak jsou LZ:

  Pokud $v^i = v^j$, $i \neq j$, pak stačí vzít:

$$\underbrace{0\cdot v^1 + 0\cdot v^2 + \dots + 1\cdot v^i + \dots + (-1)\cdot v^j + \dots + 0\cdot v^k}_{\text{netriv. LK}} = v^i - v^j = o$$

Tedy LN vektory jsou po 2 různé.

- Dva vektory jsou LZ $\Leftrightarrow$ jeden je násobkem druhého:

$$\underbrace{\alpha\cdot\vec{u} + \beta\vec{v}}_{\text{netriv. LK}} = o$$

$\alpha \neq 0: \quad \vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}$

$\beta \neq 0: \quad \vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{u}$

$\alpha \neq 0,\ \beta = 0,\ \vec{v} \neq o$

$\alpha\cdot\vec{u} = o$

$\vec{u} = o$

$\vec{u} = 0\cdot\vec{v}$, tj. $\vec{u}$ je násobek $\vec{v}$,

ale $\vec{v}$ není násobek $\vec{u}$

- Jestliže $\vec{v}^1,\dots,\vec{v}^k$ LZ, pak $\forall \vec{w}\in R^n$ jsou vektory $\vec{v}^1,\dots,\vec{v}^k,\vec{w}$ LZ:

víme, že $\exists$ $\underbrace{\lambda_1\vec{v}^1+\dots+\lambda_k\vec{v}^k}_{\text{netriv.}}=o$, pak $\underbrace{\lambda_1\vec{v}^1+\dots+\lambda_k\vec{v}^k+0\cdot\vec{w}}_{\text{netriv. LK}}=o$

$\Downarrow$

Naopak, pokud $v^1,\dots,v^k$ LN, pak i $v^1,\dots,v^{k-1}$ jsou LN.

Pozn.: $v^1,\dots,v^k$ LZ $\Leftrightarrow$ jeden z nich lze vyjádřit jako LK ostatních:

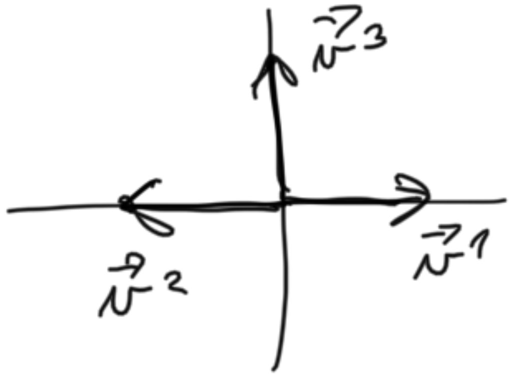
„$\Rightarrow$" Pokud $\underbrace{\lambda_1v^1+\dots+\lambda_kv^k}_{\text{netriv. LK}}=o$, pak

$\exists i\in\{1,\dots,k\}:\ \lambda_i\neq 0$. Tedy

$$v^i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}v^1-\dots-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}v^{i-1}-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}v^{i+1}-\dots-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}v^k.$$

„$\Leftarrow$" Pokud $v^i=\lambda_1v^1+\dots+\lambda_{i-1}v^{i-1}+\lambda_{i+1}v^{i+1}+\dots+\lambda_kv^k$, pak

$$\underbrace{\lambda_1v^1+\dots+\lambda_{i-1}v^{i-1}+(-1)\cdot v^i+\lambda_{i+1}v^{i+1}+\dots+\lambda_kv^k}_{\text{netriv. LK}}=o$$



$\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3$ jsou LZ

$\vec{v}^1$ lze vyjádřit jako LK $\vec{v}^2, \vec{v}^3$: $\vec{v}^1 = (-1)\cdot\vec{v}^2 + 0\cdot\vec{v}^3$,

ale $\vec{v}^3$ <u>nelze</u> vyjádřit jako LK $\vec{v}^1, \vec{v}^2$.

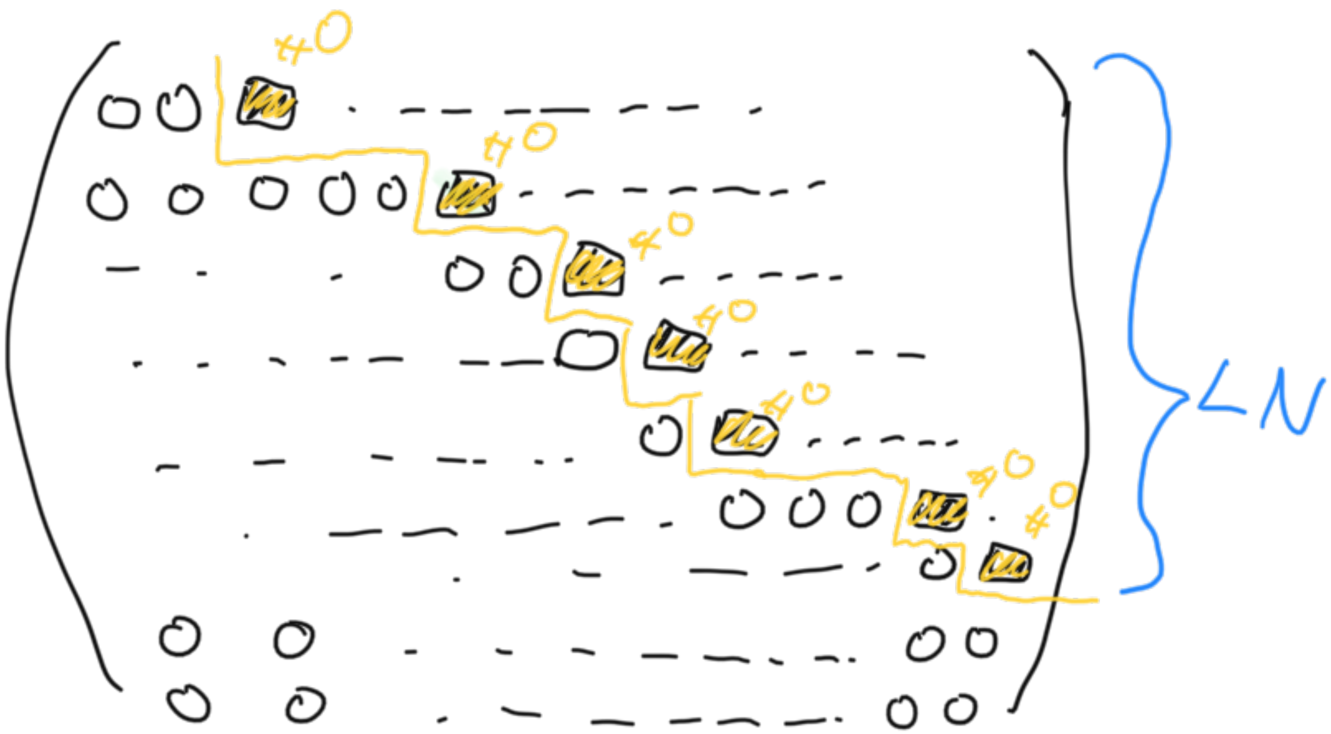
<u>Pozn.</u>: Hodnost matice $A \in M(m \times n)$ je dobře def. pojem, neboť a) nenulový vektor je LN

b) jsou-li 2 vekt. stejné, pak jsou LZ

$\Rightarrow h(A) \le m$

Počítat obecně hodnost matic není jednoduché!

Ale je to jednoduché pro tzv. <u>schodovité matice</u>:



Pozn.: V37 umožňuje určit hodnost obecné matice:

Matici A převedeme pomocí nějaké transformace na schodovitou matici (tvrz. (i)), u té známe hodnost, a dle (iii) je tato hodnost stejná, jako $h(A)$.

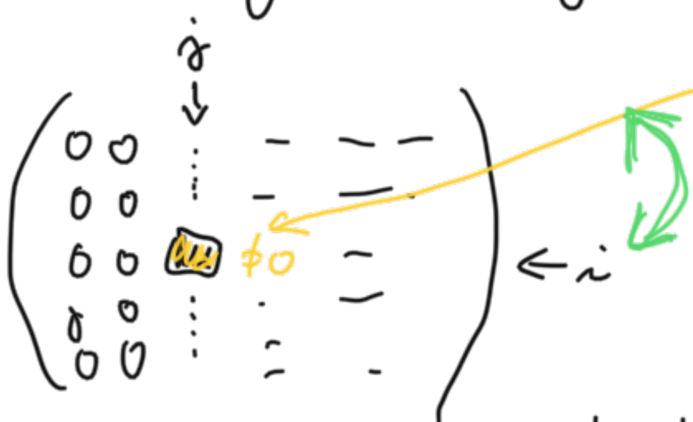
Důkaz: (i) Indukcí dle počtu řádků matice (ozn. m).

$m=1$: hotovo (matice je schodovitá)

ind. krok $m \to m+1$: $A \in M((m+1)\times n)$, předp., že tvrzení platí pro všechny matice s m řádky.

Je-li A nulová, pak je schodovitá.

Jinak $\exists j \in \{1,\dots,n\}$ nejmenší takové, že j-tý sloupec A je nenulový.



$\exists i \in \{1,\dots,m\}: a_{ij} \neq 0$

Provedeme el. ř. ú. 1. druhu:

zaměníme 1. a i-tý řádek, dostaneme matici

$B =$ 

Provedeme el. ř. ú. 3. druhu:

$$\begin{pmatrix} 0 & \vdots & \cdots \\ 0\ 0 & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Pro $\forall s \in \{2,\dots,m\}$ přičteme k s-tému ř. matice B 1. řádek právě vynásobený číslem $-\dfrac{b_{sj}}{b_{1j}}$.

Dostaneme matici

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \neq 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \cdots \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$c_{sj} = 0$ pro $s = 2,\dots,m$

$c_{1j} \neq 0$

D

Matice D má $\underline{m}$ řádků, tedy dle ind. předp. existují transformace převádějící D na schodovitou. Tato schodovitá matice má prvních j sloupců nulových. Tedy stejné transformace pracující s řádky $2,\dots,m+1$ matice C převádí C na schodovitou.