Důkaz: Dle V37(i) existuje transformace převádějící A na schodovitou A'.

Protože dle V37(iii) je $h(A') = h(A) = n$, je nutně $a'_{ii} \neq 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

Vynásobíme postupně i-tý ř. číslem $\frac{1}{a'_{ii}}$, $i = 1, \dots, n$.

Tato transf. převede A' na B, která je schodovitá a má na diagonále 1:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \vdots \\ & 0 & & 1 & \vdots \\ & & & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Nyní pro $i = 1, \dots, n-1$ přičteme k i-tému ř. matice B $(-b_{in})$-násobek n-tého ř. Dostaneme matici

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

posl. sloupec matice I

V dalším kroku pro $i = 1, \dots, n-2$ přičteme k i-tému ř. matice C_1 $(-b_{i,n-1})$-nás. $(n-1)$-ního řádku.

Dostaneme matici

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

posl. 2 sloupce matice I

Dále postupujeme analogicky, až dostaneme ...

$\ldots C_{n-1} = I$. $\square$

Důkaz: „$\Rightarrow$" sporem: nechť A je regulární a $h(A) < n$.

Dle V37 (i) $\exists$ transf T převádějící A na schodovitou.

Pak $T(I) = T(A \cdot A^{-1}) \underset{V38}{=} T(A) \cdot A^{-1}$.

$h(T(A)) \underset{V37(iii)}{=} h(A) < n \Rightarrow T(A)$ má posl. řádek nulový!

Tedy i matice $\underset{\substack{\| \\ T(I)}}{T(A) \cdot A^{-1}}$ má posl. řádek nulový!

$\Rightarrow h(T(I)) < n$, ale $h(T(I)) \underset{V37(iii)}{=} h(I) = n$. Spor!

„$\Leftarrow$" Dle L39 $\exists$ transf. T_1 taková, že $T_1(A) = I$.

Označme $B = T_1(I)$.

Pak $I = T_1(A) = T_1(I \cdot A) \underset{V38}{=} T_1(I) \cdot A = B \cdot A$.

Dle V37 (ii) existuje transf. T_2 taková, že $T_2(I) = A$, $T_2(B) = I$

... je ... : J_2 taková, že $J_2(I) = A$ a $J_2(B) = I$.

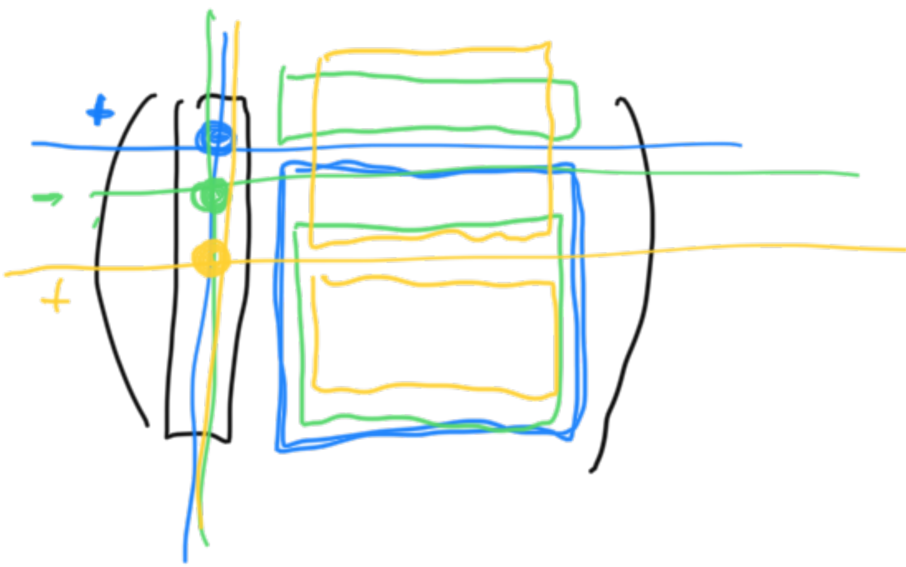
Pak $I = J_2(B) = J_2(I \cdot B) \underset{V38}{=} J_2(I) \cdot B = A \cdot B$. $\square$

Metoda nalezení inverzní matice:

Najdeme transformaci převádějící A na I.
Tatáž transformace převádí I na A^{-1}.

Prakticky:

$$(A \mid I) \overset{J}{\rightsquigarrow} (I \mid A^{-1})$$



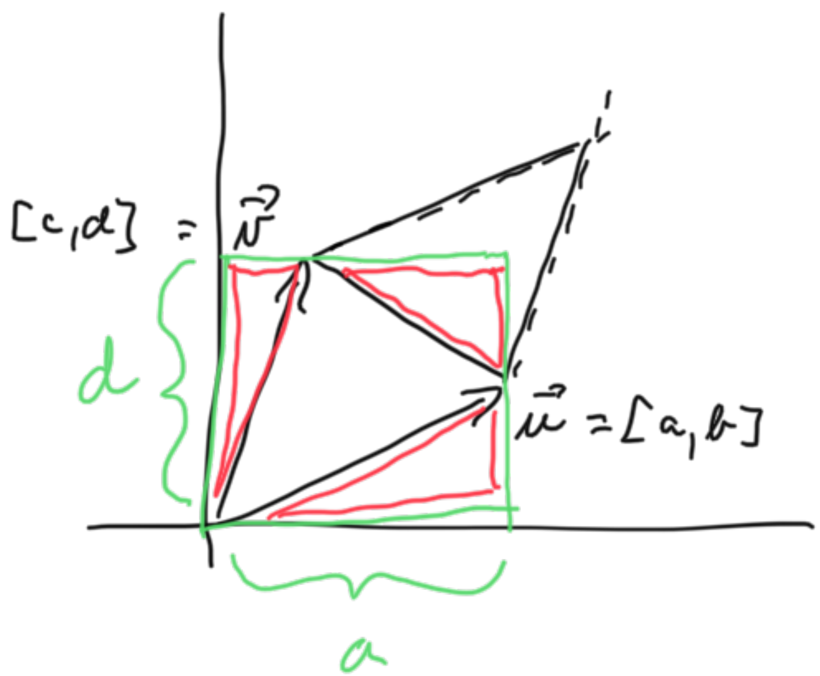
Pozn.: • Dle principu mat. indukce zavádí tato definice pojem determinantu pro $\forall A \in M(n \times n)$, $n \in \mathbb{N}$.

- Pro matici 2×2:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot a\cdot \det(d) + (-1)^{1+2}\cdot c\cdot \det(b) =$$
$$= a\cdot d - c\cdot b = ad-bc$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Př.: Plocha rovnoběžníku:



$$S_{\square} = 2\cdot S_{\triangle} = 2\cdot\left(S_{\square} - S_{\triangle}\right) =$$
$$= 2\left(a\cdot d - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} - \frac{(a-c)\cdot(d-b)}{2}\right) =$$
$$= 2ad - ab - cd - (ad - ab - cd + bc) =$$
$$= ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

V obecné poloze: $\text{plocha} = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$

$$\det\begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{a}^{j-1} \\ \vec{u}+\vec{v} \\ \vec{a}^{j+1} \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{u} \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix}$$

Důkaz: Indukcí dle n.

Pro $n=1$ zřejmé.

Nechť tvrzení platí pro $n-1$, $n>1$. Ukážeme, že platí i pro n:

Z definice
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A_{i1} = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ i\neq j}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} +$$
$$+ (-1)^{j+1} \cdot \underbrace{a_{j1}}_{u_1+v_1} \cdot \det A_{i1}$$

Dle ind. předp. je $\det A_{i1} = \det B_{i1} + \det C_{i1}$ pro $i\neq j$.

Pro $i=j$ je $A_{j1} = B_{j1} = C_{j1}$.

Tedy $\det A = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}} (-1)^{i+1} a_{i1} \left(\det B_{i1} + \det C_{i1}\right) + (-1)^{j+1}(u_1+v_1)\cdot \det A_{j1} =$

$$= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{j+1}\cdot u_1 \cdot \det B_{j1} +$$

$$+ \sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det C_{i1} + (-1)^{j+1} v_1 \det C_{j1} = \det B + \det C$$

$\square$

Důkaz: (i) indukcí dle n;

$\underline{n=1}$ zřejmé

$\underline{n>1}$: Předp., že tvrzení platí pro všechny matice typu $(n-1)\times(n-1)$.

Nechť A' vznikne z A vynásobením j-tého ř. číslem μ.

Pak $\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det A'_{i1} = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne j}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A'_{i1} + (-1)^{j+1} \mu\cdot a_{j1}\cdot \det A_{j1}$

$$= \sum (-1)^{i+1} a_{i1}\, \mu\cdot \det A_{i1} + (-1)^{j+1} \mu\, a_{j1} \cdot \det A_{j1} = \mu \det A.$$

$\substack{1\le i\le n \\ i\ne j}$ dle ind. předp. $A'_{j1} = A_{j1}$

(ii) indukcí dle n:

$\underline{n=1}$ není co dokazovat

$\underline{n=2}$ $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

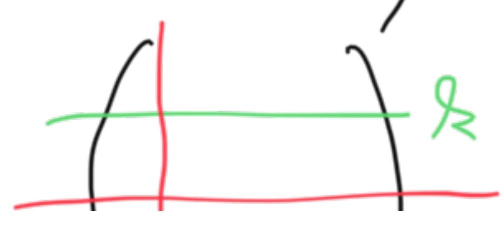
$\det A' = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad-bc) = -\det A.$

$\underline{n>2}$ Předp., že tvrzení platí pro čtverc. matice řádu $n-1$.

Nechť A' vznikne z A výměnou k-tého a l-tého řádku, $\underline{k<l}$.

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det A'_{i1} = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k,l}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A'_{i1} + (-1)^{k+1} a_{l1} \det A'_{k1} + (-1)^{l+1} a_{k1} \det A'_{l1}.$$

Matice $A'_{i1} \in M(n-1 \times n-1)$, $i \ne k,l$ vznikne z matice $A_{i1} \in M(n-1 \times n-1)$ výměnou 2 řádků, tedy dle ind. předp. je $\det A'_{i1} = -\det A_{i1}$.



Označíme $\vec{c}_i$ řádky matice A bez 1. sloupce: $\begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ \vdots \\ \vec{c}_m\end{pmatrix}$

Pak A' bez 1. sloupce je

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ k\text{-tý ř.} \to \\ \\ \\ \\ l\text{-tý ř.} \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ \vdots \\ \vec{c}_{k-1} \\ \vec{c}_l \\ \vec{c}_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_{l-1} \\ \vec{c}_k \\ \vec{c}_{l+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_m\end{pmatrix}, \quad A'_{k1} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ (l-1)\text{-ní řádek} \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ \vdots \\ \vec{c}_{k-1} \\ \vec{c}_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_{l-1} \\ \vec{c}_k \\ \vec{c}_{l+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_m\end{pmatrix}, \text{ dále } A_{k1} = \begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ \vdots \\ \vec{c}_{k-1} \\ \vec{c}_k \\ \vec{c}_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_{l-1} \\ \vec{c}_{l+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_m\end{pmatrix}$$

Tyto matice mají stejné řádky, jen v jiném pořadí

Matice A'_{k1} lze dostat z matice A_{k1} sérií výměn řádků:

$$\begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ \vdots \\ \vec{c}_{k-1} \\ \vec{c}_k \\ \vec{c}_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{c}_{l-1} \\ \vec{c}_{l+1}\end{pmatrix}$$

Postupně zaměníme k-tý a $(k+1)$-ní řádek,
$(k+1)$-ní a $(k+2)$-hý,
$\vdots$
$(l-2)$-hý a $(l-1)$-ní

$\Big\}$ $l-k-1$ výměn

C^m / Dle ind. předp. použitého $(l-k-1)$ krát je

$$\det A'_{k1} = (-1)^{l-k-1} \det A_{l1}.$$

Podobně je $\det A'_{l1} = (-1)^{l-k-1} \det A_{k1}$.

Tedy
$$\det A' = -\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne k,l}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \overbrace{(-1)^{k+1} a_{l1} (-1)^{l-k-1}}^{(-1)^{l} = -(-1)^{l+1}} \det A_{l1} + \underbrace{(-1)^{l+1} a_{k1} (-1)^{l-k-1}}_{(-1)^{2l-k} = (-1)^{k} = -(-1)^{k+1}} \det A_{k1} =$$

$$= -\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne k,l}} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} - (-1)^{l+1} a_{l1} \det A_{l1} - (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} =$$

$$= -\det A.$$

(iii) <u>Pozorování</u>: Má-li matice $B \in M(n \times n)$ dva řádky shodné, pak $\det B = 0$.

↳ Podle (ii) je $\det B = -\det B$ (zaměníme 2 shodné řádky).

Předp., že A' vznikne z A ...

… vznikla z A přičtením μ-násobku k-tého ř. k l-tému, $k \neq l$.

$$A' = \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{a}^{l-1} \\ \vec{a}^l + \mu \vec{a}^k \\ \vec{a}^{l+1} \\ \vdots \\ \vec{a}^m \end{pmatrix},$$ dle V41 a (i) je $\det A' = \det A + \mu \det B$,

kde B vznikne z A nahrazením l-tého ř. k-tým.

Dle pozorování výše je ovšem $\det B = 0$. $\square$