Důkaz: (i) Je-li T je e. ř. m. 1. druhu (záměna řádků), pak $\alpha_T = -1$.

(V42(iii))

2. druhu (vynás. ř. číslem $\neq 0$), pak $\alpha_T = \alpha$.

(V42(ii))

3. druhu

$\alpha_T = 1$.

(V42(iii))

Skládá-li se T z e. ř. m. $T_1, T_2, \dots, T_k$, tj.

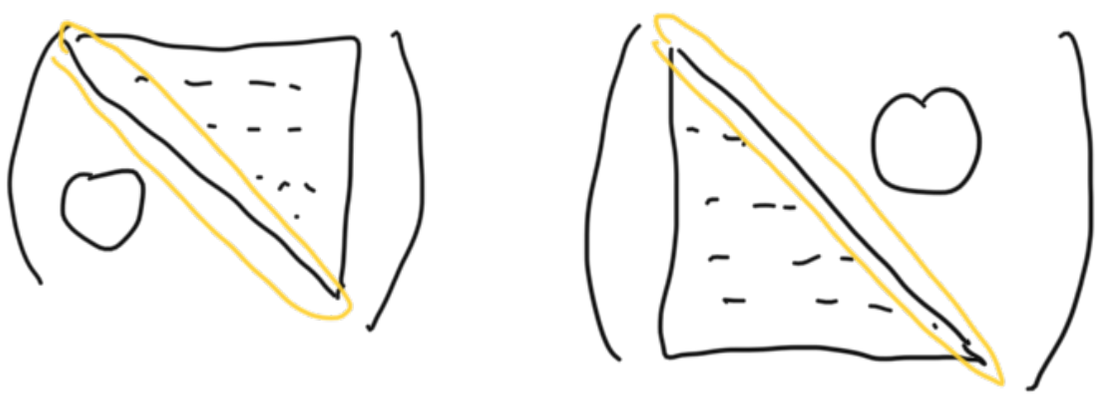
$$T(A) = T_k\left(T_{k-1}\left(\dots T_2(T_1(A))\dots\right)\right), \text{ pak}$$

$$\det T(A) = \underbrace{\alpha_{T_k} \cdot \alpha_{T_{k-1}} \cdot \dots \cdot \alpha_{T_1}}_{\alpha_T \neq 0} \cdot \det A$$

($\alpha_{T_k} \neq 0$, $\alpha_{T_{k-1}} \neq 0$, $\alpha_{T_1} \neq 0$)

(ii) Plyne z (i).

□



Důkaz: Mat. indukcí.

Pro $n=1$ zřejmé.

Předp., že $n>1$ a tvrzení platí pro matice řádu $n-1$.

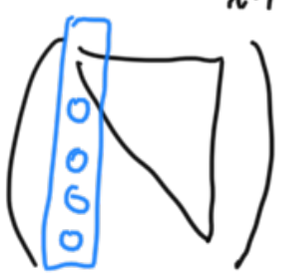
Pak pro $A \in M(n\times n)$ trojúhelníkovou je

trojúhelníková matice řádu $n-1$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} = a_{11} \det \boxed{A_{11}} \underset{\text{i.p.}}{=} a_{11}\cdot(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}).$$

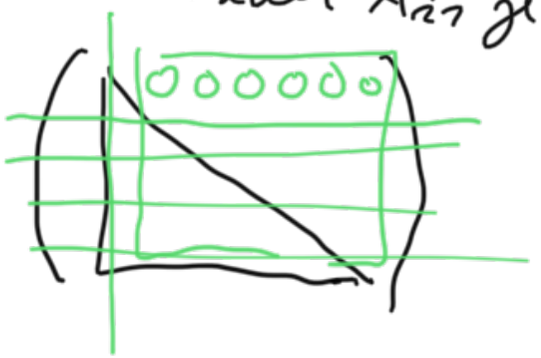
horní Δ:

$a_{i1}=0$ pro $i>1$



dolní Δ:

1. řádek A_{i1} je nulový pro $i>1$, tedy $\det A_{i1}=0$



$\square$

Důkaz: „$\Rightarrow$" Dle V40 je $h(A)=n$, dle L39 existuje transformace převádějící A na I.

$$\underset{(V44)}{\det I = 1 \neq 0} \underset{D43\,(ii)}{\Rightarrow} \det A \neq 0.$$

„$\Leftarrow$" Sporem: Předp., že A není regulární. Pak $h(A)<n$ (V40)

A lze převést na schodovitou matici A' s nulovým řádkem (V37(i), (iii)).

Pak $\det A' = 0$, takže dle D43(ii) je $\det A = 0$, což je spor. □

Důkaz: Rozlišíme dva případy:

a) A je regulární. Pak existuje lineár. T převádějící I na A.
(V40, C39, V37(ii))

Neboť α_T je číslo z Důs. 43(i).

Pak $\det A = \det T(I) = \alpha_T \cdot \det I = \alpha_T$.

Dále dle V38 platí, že $AB = T(I)B = T(I \cdot B) = T(B)$,

takže dle D43(i) je $\det AB = \det T(B) = \alpha_T \cdot \det B =$

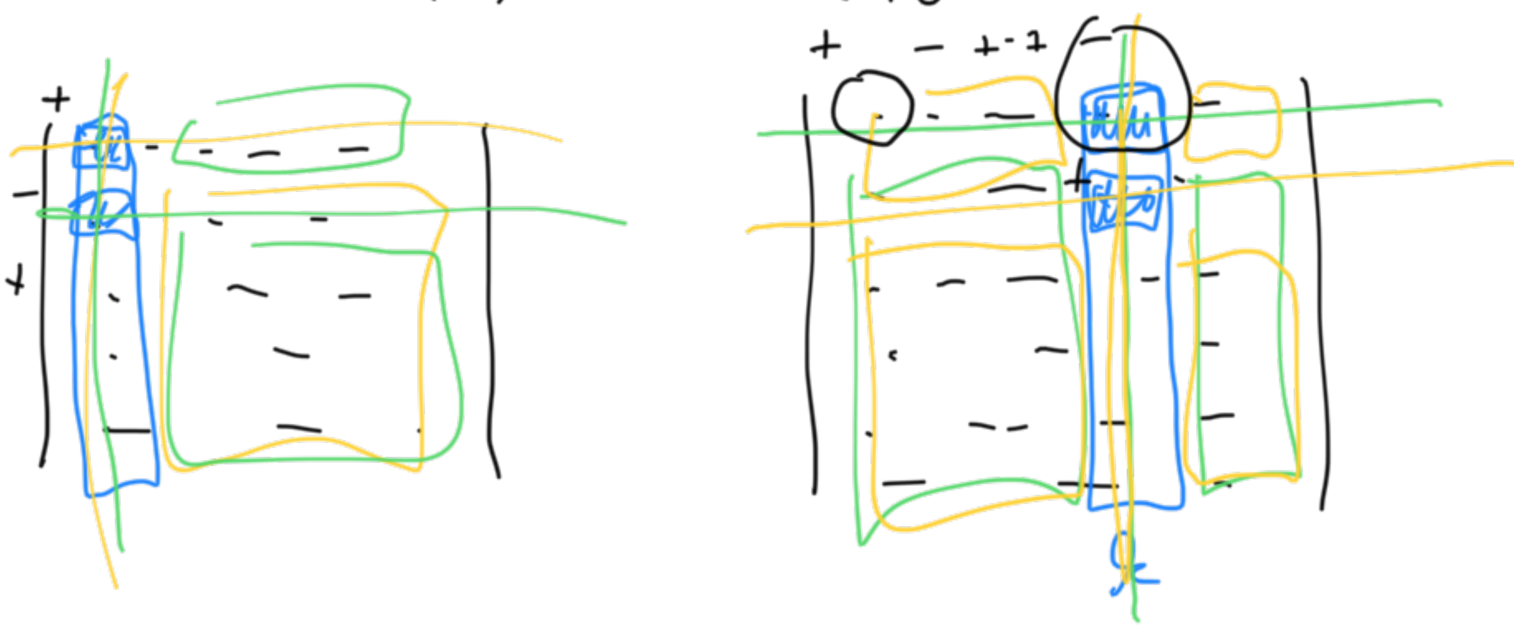
$= \det A \cdot \det B$.

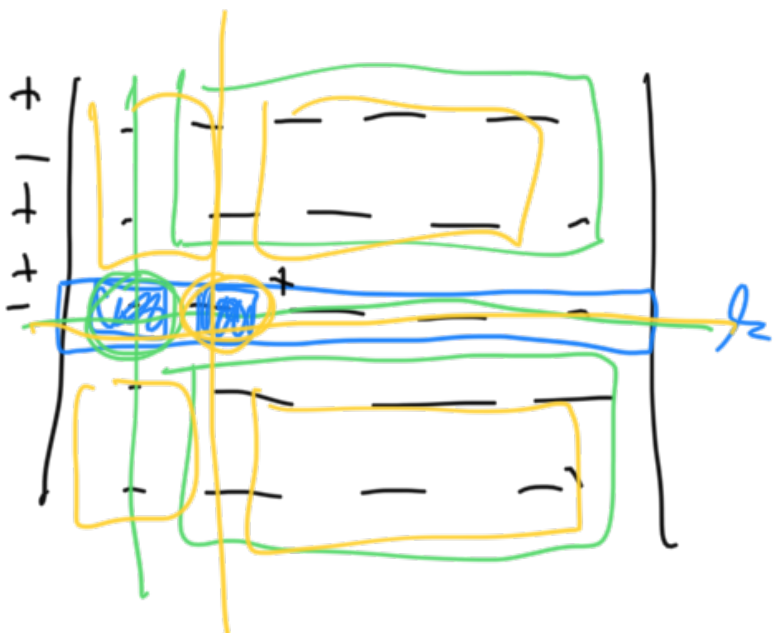
b) A není regulární. Dle V37(i) ex. lineár. T převádějící A na schodovitou. Dle V40 je $h(A) < n$, takže $T(A)$ má pod. ř. nulový (V37(iii)).

Tedy i posl. řádek matice $\Gamma(AB) \underset{V38}{=} \Gamma(A)\cdot B$ je nulový.

$\Rightarrow h(AB) < n \Rightarrow AB$ není regulární $\Rightarrow \det AB = 0 = \det A \cdot \det B$

V37 (iii) V40 V45 " V45 0 □





Pozn.: Jsou-li $A, B \in M(n \times n)$ a $AB = I$, pak i $BA = I$.

↳ $1 = \det I = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ je regulární $\Rightarrow$

V46

V45

$$\Rightarrow \quad B = I \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1}(AB) = A^{-1} I = A^{-1}.$$