$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = s_2 + a_3$

$\vdots$

$\boxed{s_{10}} = s_9 + a_{10}$

$\quad \|$

$a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$

<u>Pozn.:</u> 1) Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak nekonečnou řadu (tj. „příkaz", co máme udělat s posl. $\{a_n\}$) a jednak její součet, tj. prvek $\mathbb{R}^*$ (pokud existuje).

2) Součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- existuje
  - $\in \mathbb{R}$ .... řada konverguje
  - $\pm\infty$ .... řada diverguje k $\pm\infty$ } řada diverguje
- neexistuje .... řada <u>osciluje</u> } řada diverguje

3) Obdobně lze definovat $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (např. $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$)

<u>Příklady:</u>
- $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ ($s_n = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$)
- $\sum^{\infty} 1$. $s_n = n$, řada diverguje k $+\infty$

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ... $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0$, ... řada osciluje (nemá součet)

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$ ... <u>geometrická řada</u> s koeficientem q

Platí, že $q^n - 1 = (q-1)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Tedy
$$s_n = q + q^2 + \dots + q^n = q(1+q+\dots+q^{n-1}) = \begin{cases} q\,\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{pro } q \neq 1, \\ n & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Odtud
$$\lim s_n = \begin{cases} \dfrac{q}{1-q} & \text{pro } |q|<1 \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Závěr:
$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{q}{1-q} & \text{pro } |q|<1\text{, řada konverguje} \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1\text{, řada diverguje k } +\infty \end{cases}$$

osciluje pro $q \le -1$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, $s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$

  $= 1 - \frac{1}{n+1}$ (teleskopická řada)

  Tedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ je iracionální

- aspoň 1 z čísel $\sum \frac{1}{n^5}$, $\sum \frac{1}{n^7}$, $\sum \frac{1}{n^9}$, $\sum \frac{1}{n^{11}}$ je iracionální

- řada < určit součet

určit, zda konverguje (aproximace skutečného součtu částečným součtem)

Příklad (DŮLEŽITÝ):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ je divergentní a má součet $+\infty$ (harmonická řada)

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $\{s_n\}$ je zjevně rostoucí, má tedy limitu.

$s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

$s_4 = s_2 + \underset{\substack{\vee \\ \frac{1}{4}}}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$

$s_8 = s_4 + \underset{\substack{\vee \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{5}} + \underset{\substack{\vee \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{6}} + \underset{\substack{\vee \\ \frac{1}{8}}}{\frac{1}{7}} + \frac{1}{8} > s_4 + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4\times} = s_4 + \frac{1}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$

$\vdots$

$s_{2^k} = s_{2^{k-1}} + \overbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}}^{2^k/2 = 2^{k-1} \text{ sčítanců}} > s_{2^{k-1}} + \frac{2^{k-1}}{2^k} = s_{2^{k-1}} + \frac{1}{2} > k \cdot \frac{1}{2}$

$\vee$
$\frac{1}{2^k}$

Tedy posl. $\{s_n\}$ není shora omezená $\Rightarrow \lim s_n = +\infty$.

<u>Důkaz</u>:

$\lim s_n \in \mathbb{R}$

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) \overset{AL}{\underset{\cancel{?}}{=}} \overset{\in \mathbb{R}}{\lim s_n} - \underbrace{\lim s_{n-1}}_{} =$$

$$= \lim s_n - \lim s_n = 0. \qquad \square$$

<u>Př.</u>: Dle VSG $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje

<u>Varování</u>! Věta opačná neplatí: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D i když $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \neq \underset{\underset{+\infty}{\shortparallel}}{\sum_{n=1}^{\infty} 1} + \underset{\underset{-\infty}{\shortparallel}}{\sum_{n=1}^{\infty} -1}$$

Je-li $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \ge 0$, pak posl. část. součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je <u>neklesající</u>,

a tedy má limitu, tj. součet řady existuje.

Podle toho, je-li posl. č. součtů shora omezená či nikoli,

nastane jeden ze dvou případů: $\sum a_n$ K, $\sum a_n = +\infty$.

<u>Důkaz</u>: (ii) plyne ihned z (i) (sporem)

(i) Označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$

$t_n = b_1 + \dots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \underline{s_n} = a_1 + \dots + a_n \le b_1 + \dots + b_n = \underline{t_n}$.

Dle předp. existuje vlastní $\lim t_n$.

Posl. $\{s_n\}$ je neklesající, má tedy limitu.

Dále $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le s_n \le t_n$, tedy dle věty o limitě a

uspořádání je $0 \le \lim s_n \le \lim t_n < +\infty$,

tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

tj. řada $\sum_{n=1} b_n$ konverguje. □

Př.: $\sum \frac{1}{n^2}$ K, neboť $0 \le \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{2}{n(n+1)}}_{b_n}$, řada $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ K, řada $\sum \frac{2}{n(n+1)}$ K dle pozn.

sr. krit. $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ K

Pozn.: Konvergence řady nezávisí na konečném počtu členů:

Jsou-li $\sum a_n, \sum b_n$ dvě řady takové, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_0: a_n = b_n$.

Pak $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow \sum b_n$ K. Vskutku, označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $t_n = b_1 + \dots + b_n$.

Pak pro $n \ge n_0$ je

$$t_n = t_{n_0-1} + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_n =$$

$$= t_{n_0-1} + \underbrace{a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n}_{s_n - s_{n_0-1}} =$$

$$= t_{n_0-1} + s_n - s_{n_0-1} =$$

$$= (t_{n_0-1} - s_{n_0-1}) + s_n$$

konstanta nezávislá na n

Tedy $\lim s_n \in \mathbb{R} \iff \lim t_n \in \mathbb{R}$. (AL)

Závěr: Změníme-li v řadě konečný počet členů, její konvergence se nezmění (ale může se změnit součet).

Pozn.: Dle předchozí poznámky lze předpoklad ve V57 zeslabit na následující: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: 0 \leq a_n \leq b_n$

Př.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ K, neboť pro $n \geq 4$ je $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$

Důkaz: Pro $a \in \mathbb{R}$ označme $a^+ = \max\{a, 0\}$ .... kladná část a,

$a^- = \max\{-a, 0\}$ .... záporná část a, tj.:

$$\begin{cases} a \geq 0 \text{ .... } a^+ = a,\ a^- = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$a<0$ .... $a^+=0$, $a^-=-a=|a|$

Pak $\quad 0\le a^+\le |a|$, $\quad 0\le a^-\le |a|$,

$a=a^+-a^-$,

$|a|=a^+ + a^-$.

V57 $\Rightarrow$ (sr. krit.) $\quad \sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ konvergují $\Rightarrow \sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-) =$

$= \sum a_n^+ - \sum a_n^- \in \mathbb{R}$.

dle pozn. o aritmetice.

$\square$

Pozn.: V58 říká, že jestliže $\sum a_n$ AK $\Rightarrow \sum a_n$ K.

Později uvidíme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}}_{a_n}$ K, ale $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ D,

tedy řada $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní

(a tedy obrácená k V58 neplatí).

Pojem absolutní konvergence je tedy silnější, než pojem konvergence.

<u>Př.:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ K (dokonce AK): $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$

<u>Důkaz:</u> Z věty o limitě a uspořádání plyne, že $c \ge 0$.

Je-li $c \in \langle 0,+\infty)$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0$: $\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < 1$, tj.

$$0 \le \frac{a_n}{b_n} < c+1.$$

Protože $b_n \ge 0$, dostáváme, že

$$0 \le a_n \le (c+1)\, b_n.$$

Jestliže $\sum b_n$ K, pak $\sum (c+1) b_n$ také K (pozn. o aritmetice), tedy dle sr. krit. (V57 + pozn.) je $\sum a_n$ K.

Odtud plyne druhý bod a jedna implikace v prvním bodě.

Je-li $c \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}$, pak $\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c} \in \langle 0,+\infty)$, tedy

dle

... je pravdivé pokud $\sum a_n$ K, pak $\sum b_n$ K.

Odtud plyne druhá implikace v prvním bodě a třetí bod.

$\square$

Pro použití V57, V59 je třeba znát konkrétní konvergentní (resp. divergentní) řady s nezáp. členy, se kterými bychom mohli srovnávat.

Důkaz: (i) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A < 1$, pak $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $\underbrace{A+\varepsilon}_{q} < 1$.

Položme $q = A+\varepsilon$.

Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} < A + \varepsilon = q$, tedy

$$|a_n| < q^n \underset{\substack{\text{sr. krit.} \\ q<1 \\ (\text{V57} + \text{pozn.})}}{\Longrightarrow} \sum |a_n| \ K$$

(ii) Pokud $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Tedy i $|a_n| \geq 1$, tedy neplatí, že $\lim a_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a_n$ D.
V56

$\square$

Pozn.: Pokud $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pak nelze rozhodnout na základě V60.
Mohou nastat oba případy ($\sum \frac{1}{n}$ D, $\sum \frac{1}{n^2}$ K).