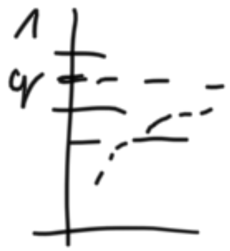
**Důkaz:** (i) $\exists\, 0<q<1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, tj.



$|a_{n+1}| < q|a_n|$.

Tvrdím, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| \leq C \cdot q^n$, kde $C = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}$.

Indukcí: pro $a_{n_0}$ jasné;

$n \geq n_0$: $|a_{n+1}| < q|a_n| \underset{\text{ind. předp.}}{\leq} q \cdot C \cdot q^n = C \cdot q^{n+1}$.

$0<q<1 \Rightarrow \sum C \cdot q^n$ K $\underset{\text{sr. krit.}}{\Rightarrow} \sum |a_n|$ K, tj. $\sum a_n$ AK.

(ii) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, tj. $|a_{n+1}| > |a_n|$.

Tedy $\{|a_n|\}$ je rostoucí od indexu $n_0$ a platí

$\forall n \geq n_0$: $|a_n| \geq \underbrace{|a_{n_0}|}_{\text{pevné kladné číslo}} > 0$

$\Rightarrow$ neplatí, že $\lim a_n = 0 \underset{V56}{\Rightarrow} \sum a_n$ D. $\square$

Pozn.: Je-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, pak nelze na základě V61 rozhodnout:

$$\sum \frac{1}{n} \text{ D}, \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ K}$$

Př.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10000^n}{n!}$ K: $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10000}{n+1} \to 0 < 1$

Důkaz: Je-li $\alpha \le 1$, pak $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n^\alpha}$. Řada $\sum \frac{1}{n}$ D, tedy dle sr. krit. (V57) je $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ D.

Nechť nyní $\alpha > 1$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ je řada s nezáp. členy, tedy posl. částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající $\Rightarrow \lim s_n$ existuje, $\ge 0$.

Je $\{s_n\}$ omezená? $\quad s_1 = 1$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} = s_1 + \boxed{\frac{1}{2^\alpha}} + \underset{\frac{1}{2^\alpha}}{\overset{\vee\!|}{\frac{1}{3^\alpha}}} \le s_1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} = s_1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \overset{}{=} 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$s_7 = s_3 + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha} \le s_3 + \frac{4}{4^\alpha} \le 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} = 1 + \frac{1}{\dots} + \left(\frac{1}{\dots}\right)^2$$

$\frac{1}{4^\alpha} \; \dots \; \frac{1}{4^\alpha}$

Indukcí lze ukázat, že $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$s_{2^k-1} \le \underbrace{1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}}_{\text{část. součet konvergentní geometrické řady s koeficientem } \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1} \le \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^j}_{\text{pevné } \mathbb{R} \text{ číslo}} \in \mathbb{R}$$

$\alpha > 1$

Tedy posl. $\{s_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a shora omezená $\Rightarrow$ má vlastní limitu.

Tedy i $\{s_n\}$ má vlastní limitu dle věty o limitě vybrané posl. $\square$

Př.: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \cdot \sqrt{n}}$ : $|a_n| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ K

$\Rightarrow$ sr. krit. AK

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+1}{n^3+1}}_{a_n}$$

Lim. srovn. krit. s řadou $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2+1}{n^3+1}\Big\} a_n}{\frac{1}{n}\Big\} b_n} = \lim \frac{n^3+n}{n^3+1} = 1 \in (0, +\infty)$$

$\sum a_n$ K $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{n}$ K

$$\sum \frac{1}{n}\ D \Rightarrow \sum a_n\ D$$

alternující řada: Její členy pravidelně střídají znaménka.

Lze napsat ve tvaru $\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n \geq 0$.

Pozorování: Pokud $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists k_1 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_1 : a_{2k} \in B(A,\varepsilon)$,

$\exists k_2 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_2 : a_{2k+1} \in B(A,\varepsilon)$.

Položme $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2+1\}$.

Je-li $n \geq n_0$, pak

- $n$ sudé: $n = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $2k = n \geq n_0 \geq 2k_1 \Rightarrow k \geq k_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n = a_{2k} \in B(A,\varepsilon)$
- $n$ liché: $n = 2k+1 \geq n_0 \geq 2k_2+1 \Rightarrow k \geq k_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n = a_{2k+1} \in B(A,\varepsilon)$

Důk. VG3: Je $\inf\{a_n\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limita} \\ \text{monot. posl.}}}{\lim} a_n = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$

Posl. $\{s_{2n}\}$ je nerostoucí: $s_{2(n+1)} = s_{2n} \overbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}^{\leq 0 \ (\{a_n\} \text{ nerost.})} \leq s_{2n}$.

Dále $s_{2n} = -a_1 + (\underbrace{a_2 - a_3}_{\substack{\geq 0 \\ \{a_n\} \text{ nerost.}}}) + (\underbrace{a_4 - a_5}_{\geq 0}) + \dots + (\underbrace{a_{2n-2} - a_{2n-1}}_{\geq 0}) + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq -a_1$.

Tedy existuje $\underline{\lim s_{2n} = s \in \mathbb{R}}$.

Dále $s_{2n+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ s}}{s_{2n}} - \underset{\substack{\downarrow \text{ předp.} \\ 0}}{a_{2n+1}} \overset{AL}{\Rightarrow} \underline{\lim s_{2n+1} = s}$

Dle pozorování výše je $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ K. $\square$

Př.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ K $\left(\lim \frac{1}{n} = 0, \ \{\frac{1}{n}\} \text{ je klesající}\right)$

↑ konverguje neabsolutně