Absolutní hodnota a její význam

1. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak $-|a| \leq a \leq |a|$.

2. Nechť $x, c \in \mathbb{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x| < c$, právě když $(x < c)$ & $(x > -c)$ (zkráceně $-c < x < c$).

3. Nechť $x, c \in \mathbb{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x| > c$, právě když $(x > c) \vee (x < -c)$.

4. Nechť $x, y, c \in \mathbb{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x - y| < c$, právě když $x \in (y - c, y + c)$.

5. Vyjádřete analogicky vztahy $|x - y| \leq c$, $|x - y| > c$, $|x - y| \geq c$.

6. Vyjádřete jednoduše množinu $\{x \in \mathbb{R};\ |||x| - 1| - 2| - 3| < 1\}$.

Důkazy metodou matematické indukce

7. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

8. Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ platí $n^2 \leq 2^n$.

9. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$. Pak existují $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $r < k$ a $n = qk + r$. (Dělení se zbytkem)

10. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezáporná čísla. Pak platí

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává jen v případě, že jsou všechna čísla $a_1, \ldots, a_n$ stejná. (Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, AG nerovnost)

Výroky, výrokové spojky, kvantifikátory a jejich použití

11. Vyjádřete jednoduše množinu $\{a \in \mathbb{R};\ (\forall x \in \mathbb{R})(|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$.

12. Uvažme následující výroky:

(i) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
(ii) $(\exists y \in M)(\forall x \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
(iii) $(\exists y \in M)(\exists z \in M)(\forall x \in M)(x = y + z)$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je-li
a) $M = \mathbb{N}$, b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$, c) $M = (0, 1)$, d) $M = \{0\}$?

13. Jsou pravdivé následující výroky?

a) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
b) $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
c) $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$

Napište negace těchto výroků.

14. Vyjádřete co nejjednodušeji vztah mezi čísly $a, b \in \mathbb{R}$ určený formulí:

a) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < c)$,
b) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(a - x < c \Rightarrow |b - x| < c)$,
c) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|a - x| < c \Rightarrow b - x < c)$,
d) $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(a - x < c \Rightarrow b - x < c)$,
e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists u > 0)(\forall c \in (0, u))(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < u)$.

Infimum a supremum

15. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Předpokládejme, že má nejmenší prvek (tj. minimum, značíme $\min A$). Ukažte, že $\inf A = \min A$.

Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro největší prvek (tj. maximum, $\max A$).

16. Nalezněte suprema a infima (případně maxima a minima) následujících množin (pokud existují):
a) $A = \langle 0, 1)$, b) $B = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$, c) $C = \{1, -5, 7, -3, 50\}$,
d) $D = (-1, 0) \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, e) $E = (1, 2) \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, f) $F = \left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}$.

17. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Označme $s = \inf A$, $S = \sup A$, $t = \inf B$, $T = \sup B$.

(a) Vyjádřete $\inf(A \cup B)$ a $\sup(A \cup B)$ pomocí hodnot s, S, t, T.
(b) Lze něco říci o $\inf(A \cap B)$ a $\sup(A \cap B)$? (Uvažte případ, kdy $A = (-1, 1)$ a $B = \{-1, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$.)

Limita posloupnosti

18. Spočtěte následující limity posloupností:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^5}}{7-\frac{3}{n^2}}, \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{5n+3}, \quad \text{(d)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+7)}{n^2+5n+15},$$

$$\text{(e)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{n}}, \quad \text{(f)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}, \text{ kde } a_n \geq 0 \text{ a } \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{(g)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+15}-\sqrt{n+1}\right), \quad \text{(h)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5n-1}-\sqrt{n^2+3}\right), \quad \text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n^2+1}},$$

$$\text{(j)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}, \quad \text{(k)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a \in (0,+\infty), \quad \text{(l)} \lim_{n\to\infty} q^n,\ q \in \mathbb{R},$$

$$\text{(m)} \lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \quad \text{(n)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}.$$

19. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

20. Pomocí uvedeného tvrzení spočtěte limity:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2^n+17^n}{n!+n+3^n}.$$

21. Pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti spočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} q^n$ pro $q \in (0,1)$,
(b) $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{k}$ (kde $k > 1$ je parametr),
(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$.

22. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel, $a \geq 0$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak platí:

(a) $a_n \to a \Leftrightarrow a_n^p \to a^p \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.
(b) $a_n \to +\infty \Leftrightarrow a_n^p \to +\infty \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \to +\infty$.

23. Některé příklady ze zkouškových písemek z minulých let:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^{100}-(4-\frac{3}{n})^{50}}{(8-\frac{1}{n})^{34}-(4+\frac{1}{n})^{51}}, \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt[3]{n^3+1}]+[\sqrt[3]{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}}, \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n\right],$$

$$\text{(d)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2 n}-\sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}, \quad \text{(e)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+7)^{50}-(n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100}+n^{99}-1}-\sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}}.$$

Limita funkce

24. Spočtěte následující limity:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 5} \frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}, \quad \text{(d)} \lim_{x\to-\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+x\right),$$

$$\text{(e)} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}, \quad \text{(f)} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}, \quad \text{(g)} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^2 x+3\cos x-2}{2\cos^2 x-5\cos x+2},$$

$$\text{(h)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad \text{(j)} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x, \quad \text{(k)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\big(\sin(\sin x)\big)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\cdot x^k,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{(l)} \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{x^3-1}, \quad \text{(m)} \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\log\frac{x^2+1}{x^2+5}, \quad \text{(n)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+15)}{\log(x^{15}+3)}, \quad \text{(o)} \lim_{x\to 0} \frac{10^x-2^x}{x},$$

$$\text{(p)} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+1}{x+3}\right)^{5x-x^2}, \quad \text{(q)} \lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{1/x}, \quad \text{(r)} \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

25. Některé příklady ze zkouškových písemek z minulých let:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{x^6}-1}}{x\log\cos x}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log\sin x\cdot\operatorname{tg}^2 x, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{1-\cos\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x},$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \left(4x^2-9\pi^2\right)\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}, \quad \text{(e)} \lim_{n\to\infty} \big(\log(n^6+5n^3+1)-\log(n^6+1)\big)\,(n^3+\cos n),$$

$$\text{(f)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2^n}{n^8+2^n}\right)^{2^n/n^8}, \quad \text{(g)} \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)^x,$$

$$\text{(h)} \lim_{x\to 0} \frac{3^{2^{x+1}-2}-1}{\sqrt{1-\cos x}}, \quad \text{(i)} \lim_{x\to+\infty} x\left(2^{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}}-2^{1/x}\right).$$

Spojitost a derivace funkcí

26. Nechť f, g jsou funkce spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $\max\{f,g\}$ a $\min\{f,g\}$ jsou spojité v bodě a. Funkce $\max\{f,g\}$ je definována takto:

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \qquad x \in D_f \cap D_g.$$

Stejné tvrzení platí i pro spojitost zleva a zprava.

27. Určete ve kterých bodech jsou spojité (případně zleva, zprava) funkce:

$$\text{(a) } f(x) = \max\{x, x^2\}, \qquad \text{(b) } f(x) = \min\{x, \operatorname{sgn} x\}$$

28. Pro následující funkce vyšetřete spojitost a spočtěte derivaci, včetně jednostranných:

(a) $\left(x^8 + x^6 - 1\right)^{157}$, (b) $\sqrt[n]{x}$, (c) $\sin\left(x^3 \cos(\log x)\right)$, (d) $\dfrac{e^{x^5}\cos(x+7)}{\log(x^4+1)}$, (e) x^x (jak funkci definovat v nule?),

(f) x^{x^x}, (g) $\arcsin(\sin x)$, (h) $\arcsin\dfrac{4x}{x^2+4}$, (i) $\max\left\{x^2, x^3 + \operatorname{sgn} x\right\}$, (j) $(x+2)^2\sqrt{|x^2-4|}$, (k) $\sqrt{e^{\sin^2 x} - 1}$,

(l) $\min\left\{x^2, \sqrt[3]{x}\right\}$, (m) $\arcsin\min\left\{1, \dfrac{1}{x}\right\}$, (n) $\cos x \cdot [\sin x]$, (o) $\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}$.

Průběh funkce

29. Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

(a) $\log\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, (b) $\sqrt[5]{3x^5 + 5x^3}$, (c) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{x+1}}$, (d) $\sin x + \dfrac{1}{6\sin x}$, (e) $\dfrac{e^{|x|}}{|e^x - 3|}$,

(f) $\sqrt{x} + \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$, (g) $x^{2-3\log x}$, (h) $\dfrac{4^x - \frac{5}{2}}{(2^x-2)^2}$.