(Russell, 1902)

A je „normální" $\Leftrightarrow$ $A \notin A$ (např. množina čtverců je „normální". Množina „nečtverců" není „normální".)

$M = \{A;\ A$ je „normální"$\} = \{A;\ A \notin A\}$ | $\{A \in X;\ A \notin A\}$

Je M „normální"?

X … množina všech množin

- M je „normální": $M \notin M \Rightarrow M \in M$ spor
- M není „normální": $M \in M \Rightarrow M \notin M$ spor

$2 < 3$

Číslo 2 je liché.

Jaké bude zítra počasí?

Nechť přirozené číslo n je sudé.

[illegible]

číslo x+1 je racionální.

A	$\neg A$
0	1
1	0

jestliže platí A, pak platí B.

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

předpoklad závěr

$$A \Rightarrow B$$

„A je postačující podmínka pro B"

„B je nutná podmínka pro A"

A	B	$A \& B$	$\neg(A \& B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1

A:

Kočka leze dírou, pes oknem, nebude-li pršet, nezmoknem

B C D E

$$A = B \& C \& (D \Rightarrow E)$$

$$\neg A = \neg B \vee \neg C \vee \neg(D \Rightarrow E) = \neg B \vee \neg C \vee (D \& \neg E)$$

¬A: Kočka neleze dírou nebo pes neleze oknem nebo (nebude pršet a zmoknem.)

$\forall x \in \mathbb{N}: x < 3$ NE

$V(x)$: $x < 3$, $x \in N$

$V(1)$ ... $1 < 3$ pravdivý výrok

$V(4)$ .... $4 < 3$ nepravdivý výrok

$\exists x \in N$: $\underline{x < 3}$ ANO

$W(x,y)$: $x < y$, $x \in N$, $y \in N$

$W(1,2)$ .... $1 < 2$

$W(2,2)$ .... $2 < 2$

$S(x)$: „x je hlavní město USA.", $x \in$ množina měst na Zemi

$\forall$ .... obecný (velký) kvantifikátor

$\exists$ .... existenční (malý) kvantifikátor

$V(\underline{x_1}, \underline{x_2})$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$

→ volné proměnné

$$W(x_2) = \underline{\forall x_1 \in M_1} : V(x_1, x_2) \quad , x_2 \in M_2$$

vázaná proměnná

$$\exists x_2 \in M_2 : W(x_2) \quad \dots \text{výrok}$$

$$\hookrightarrow \exists x_2 \in M_2 : \left(\forall x_1 \in M_1 : V(x_1, x_2) \right)$$

$$\exists x_2 \in M_2 \ \forall x_1 \in M_1 : V(x_1, x_2)$$

$$\underline{\exists b \in \mathbb{N} \ \forall a \in \mathbb{N} : a < b}$$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ x > 2 : \ x^2 > 4 \quad \| \quad \forall x \in \mathbb{N} : (x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$$

$$\neg \left(\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} \ \forall z \in \mathbb{N} : \ z > y \Rightarrow z > x \right)$$

$$\neg \left(\forall x \in \mathbb{N} : \left(\exists y \in \mathbb{N} : \left(\forall z \in \mathbb{N} : \ \underline{z > y \Rightarrow z > x} \right) \right) \right)$$

$\exists x \in \mathbb{N}: \neg$ —— 〃 ——

$\exists x \in \mathbb{N}: \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}: \ z > y \ \& \ z \leq x$

<u>VAROVÁNÍ</u>: Pořadí kvantifikátorů nelze libovolně zaměňovat!

M ... množina mužů
$\check{Z}$ ... množina žen
$L(m, \check{z})$ .... Muži m se líbí žena $\check{z}$. $m \in M$, $\check{z} \in \check{Z}$

$$\forall m \in M\ \exists \check{z} \in \check{Z}: L(m, \check{z})$$

.... Každému muži se líbí nějaká žena.

$$\exists \check{z} \in \check{Z}\ \forall m \in M: L(m, \check{z})$$

Existuje žena, která se líbí všem mužům.

… existuje řada, která [illegible]

<u>Definice</u>: Řekneme, že přirozené číslo je sudé, pokud je dělitelné dvěma. Přirozené číslo, které není sudé, nazýváme liché.

<u>Definice</u>: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže n je dělitelné dvěma, potom jej nazýváme sudé; v opačném případě jej nazýváme liché.

Věta, důsledek, tvrzení, lemma

<u>Věta</u>: Přirozené číslo n je liché, právě když existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $n = 2k+1$.

<u>Důkaz</u>: „$\Leftarrow$" $n = 2k+1$, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

…. zbytek po dělení 2 je 1

[illegible] n není dělitelné 2

tedy n není dělitelné 2

tedy je liché

„$\Rightarrow$" vydělím n 2 se zbytkem, tj.:

$$n = 2p + q, \text{ kde } p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$0 \leq q < 2, \ q \in \mathbb{N}$$

tedy $q = \begin{cases} 0 \ \ldots\ \text{NE} \\ 1, \text{ tj. } n = 2p + 1 \end{cases}$

vezmu $k = p$

Důsledek: Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak n^2 je také liché. □

Důkaz: $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}: \quad n = 2k + 1$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$$

$$= 2l + 1, \text{ kde } l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

□