$\underline{\forall h \in \mathbb{R}, h > g} : \exists x \in M : x < h$

$\exists h \in \mathbb{R}, h > g : \ldots$

$\exists h \in \mathbb{R}, h \leq g$?

$\forall h \in \mathbb{R} : (h > g \Rightarrow \exists x \in M : x < h)$

$\exists h \in \mathbb{R} : (h > g \ \& \ \neg(\exists x \in M : x < h))$

$\exists h \in \mathbb{R} : (h > g \ \& \ \forall x \in M : x \geq h)$

$\underline{\exists} h \in \mathbb{R}, h > g : \forall x \in M : x \geq h$

$n = 1$ ... zřejmé

$n > 1$

$$y^n - x^n = \underbrace{(y-x)}_{<0}\underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1})}_{\geq 0}$$

$y > x \Leftrightarrow y^n > x^n$ $\quad >0 \quad > 0$

$y > x \Rightarrow \underline{y^n > x^n}$: $y > x \geq 0$ ... $y > 0$ $\quad$ -"- > 0

$\underline{y^n > x^n} \Rightarrow y > x$: $y = x$ ... $y^n = x^n$ spor ✗

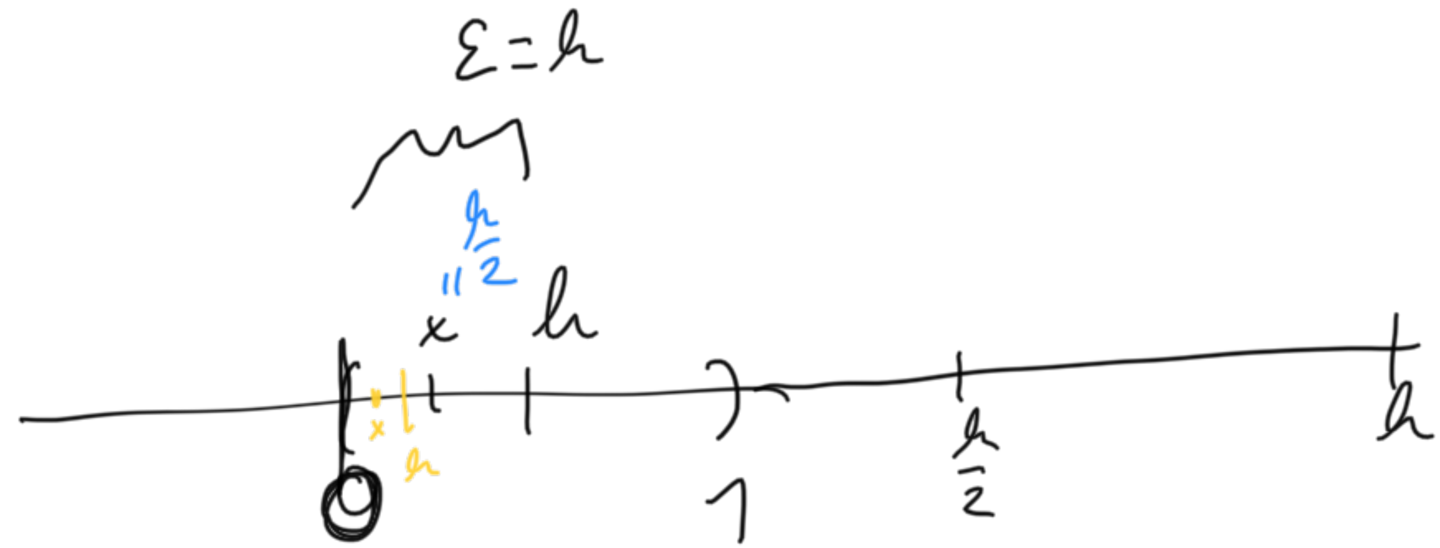
$y < x$ .... $y^n \leq x^n$ spor ✗

$y > x$

$(a,a) = \emptyset$

$\langle a,a\rangle = \{a\}$

Př.: $\inf\,(0,1) \overset{?}{=} 0$



(i) 0 je dle definice intervalu dolní závora $(0,1)$

(ii) CHCI: $\forall h \in \mathbb{R},\ h>0\ \exists x \in (0,1):\ x<h$

Zvolme libovolné $h \in \mathbb{R},\ h>0$.

$h<1$: položme $x = \frac{h}{2} > 0$ ✓ $x \in (0,1)$

$x<1$ ~~X~~ $x<\frac{1}{2}$

$h \geq 1$ ... položme $x = \frac{1}{2} \in (0,1)$, $\frac{1}{2} < h$ ✓

$0 \notin (0,1)$, tj: infimum nemusí patřit do množiny

$\inf\,\langle 0,1\rangle = 0$

$0 \in \mathbb{R}$?

$1 \in K$

$((1+1)+1)+1$ ..... $\mathbb{N}$

2 3 4

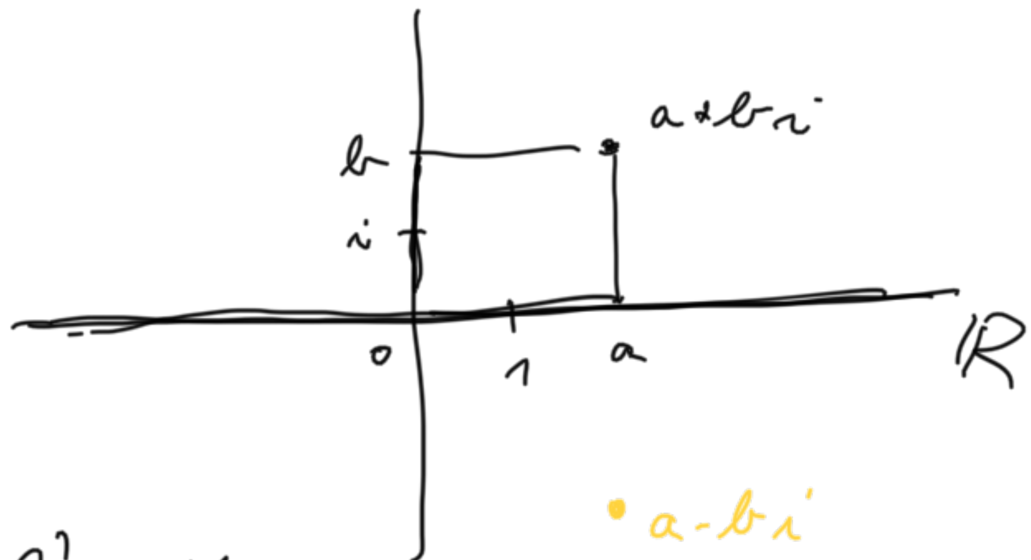
$-n,\ n \in \mathbb{N}$ } $\mathbb{Z}$

$p \cdot (q^{-1})$ $\quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$

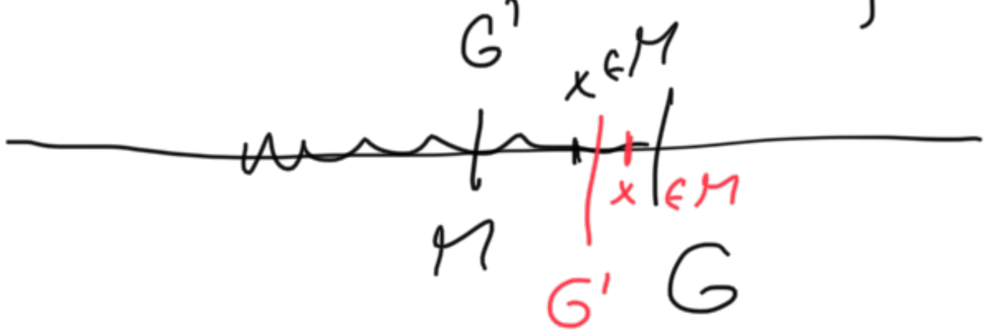
.... $\mathbb{Q}$

$x^2 = 2$

$x^2 + 1 = 0$



$a + 0 \cdot i = a \in \mathbb{R}$

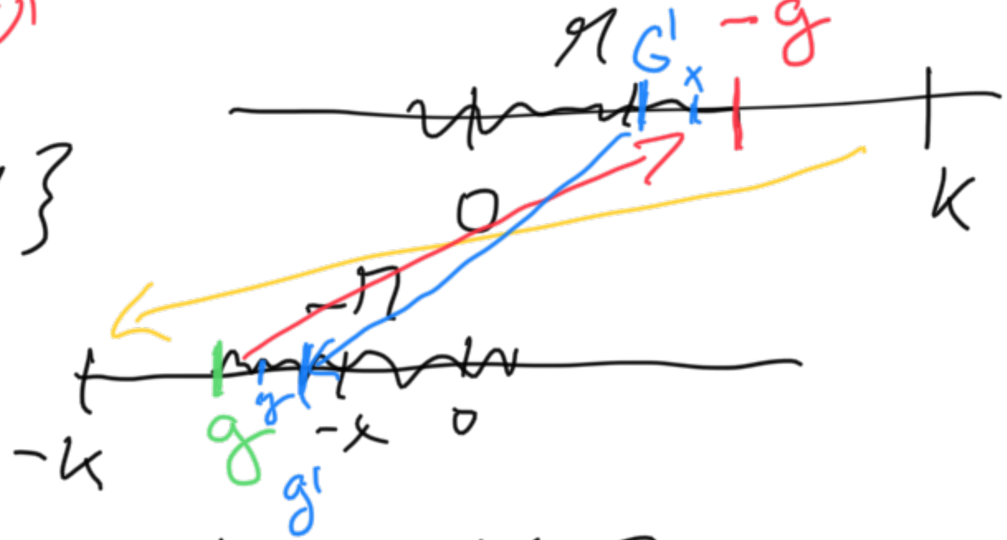


Pozn: Z def. suprema: má-li M supremum, pak
- $M \neq \emptyset$,
- M je shora omezená

Důkaz V2:

Existence:

Označme $-M = \{-x;\ x \in M\}$



$M \neq \emptyset \Rightarrow -M \neq \emptyset$

CHCI: $-M$ je zdola omezená

↳ M je shora omezená, např. závorou $K \in \mathbb{R}$.

pak $-K$ je dolní závora $-M$, neboť

pro libovolné $y \in -M$, je $-y \in M$, tedy

$$-y \le K \quad / \cdot (-1)$$

$$\underline{y \ge -K}$$

Podle axiomu infima má $-M$ infimum $g \in \mathbb{R}$.

Položím $G = -g$, tvrdím, že G je sup M:

(i) nechť $x \in M$ libovolné. Pak $-x \in -M$, a tedy

$$g \le -x \quad / \cdot (-1)$$

$G = -g \ge x$, tedy G je horní závora M.

(ii) Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$ libovolné zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$ libovolně.

Položme $g' = -G'$. Pak
$$G' < G \;/\cdot(-1)$$
$$-G' > -G$$
$$g' > g$$

Z vlastnosti infima (ii) plyne, že $\exists\, y \in -M: \; y < g'$

Položme $x = -y$. Pak $x \in M$.

dále $y < g' \;/\cdot(-1)$
$$\underbrace{-y}_{x} > \underbrace{-g'}_{G'}, \quad \text{tj.} \quad x > G'$$

jednoznačnost:

Předpokládejme, že $H \in \mathbb{R}$ splňuje vlastnosti (i) a (ii) z def. suprema.

- $H < G$ … z vl. (ii) pro G $\exists\, x \in M, x > H$. spor s vl. (i) pro H. ×
- $H > G$ … z vl. (ii) pro H $\exists\, x \in M, x > G$ spor s vl. (i) pro G. ×
- $H = G$ ✓

$\square$

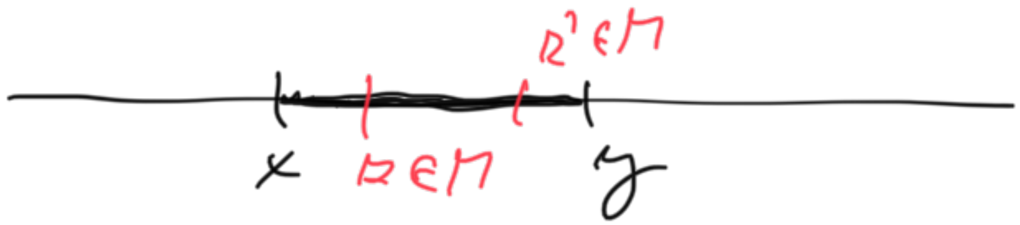
Pozn.: 1) Je-li M neprázdná a konečná, pak existuje $\max M$ i $\min M$.

2) Je-li M je omezená neprázdná, pak $\inf M \leq \sup M$.

Rovnost nastává, právě když M je jednoprvková.

3) Existuje-li $\max M$, pak $\sup M = \max M$,
obdobně existuje-li $\min M$, pak $\inf M = \min M$.

Ale <u>pozor</u>: $\max M$ ani $\min M$ nemusejí existovat!
$\inf (0,1) = 0$, ale $(0,1)$ nemá minimum



<u>Důkaz</u>: Pokud $M = \emptyset$, pak M je interval.

Nechť tedy $M \neq \emptyset$. Není-li M omezená shora ani zdola, pak

$$M = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}:$$

Zvolme libovolné $z \in \mathbb{R}$. $\exists\, y \in M,\ y > z$ (z není horní závora M)

$\exists\, x \in M,\ x < z$

máme tedy $x, y \in M$, $x < z < y \Rightarrow z \in M$.
dle předp.

Nechť nyní M je omezená. Tedy má inf i sup.

Položme $\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{a = \inf M}$, $b = \sup M \in \mathbb{R}$.

CHCI: M je interval s krajními body a, b.

1) a je dolní závora M, b je horní závora M $\Rightarrow$

$$M \subset \langle a, b \rangle$$

2) ukážeme, že $(a,b) \subset M$:

zvolme $z \in (a,b)$ libovolné.

$z > a \Rightarrow \exists x \in M: x < z$ (vl. (ii) infima)

$z < b \Rightarrow \exists y \in M: y > z$ (vl. (ii) suprema)

Máme tedy $x, y \in M$, $x < z < y \Rightarrow z \in M$

dle předp.

$\square$