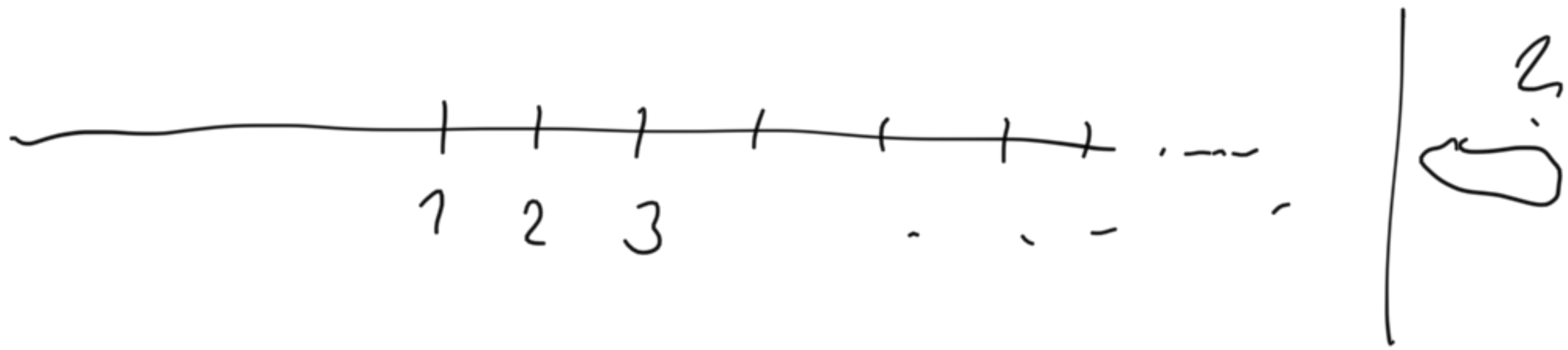



Důkaz: Zvolme $x \in \mathbb{R}$ libovolné.

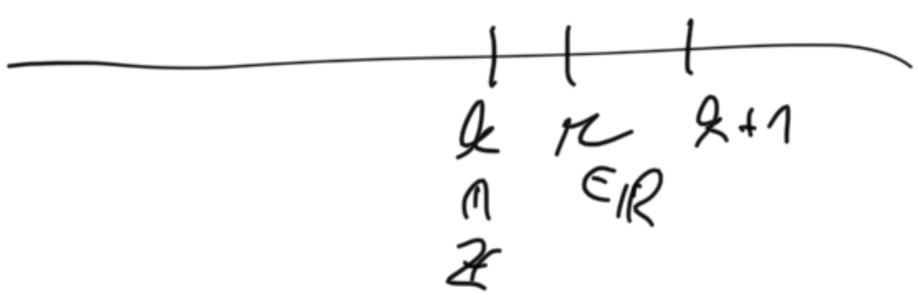
sporem: Předpokládejme, že $\forall n \in \mathbb{N}: x \geq n$.

Pak $\mathbb{N}$ je shora omezená, neprázdná ($1 \in \mathbb{N}$),

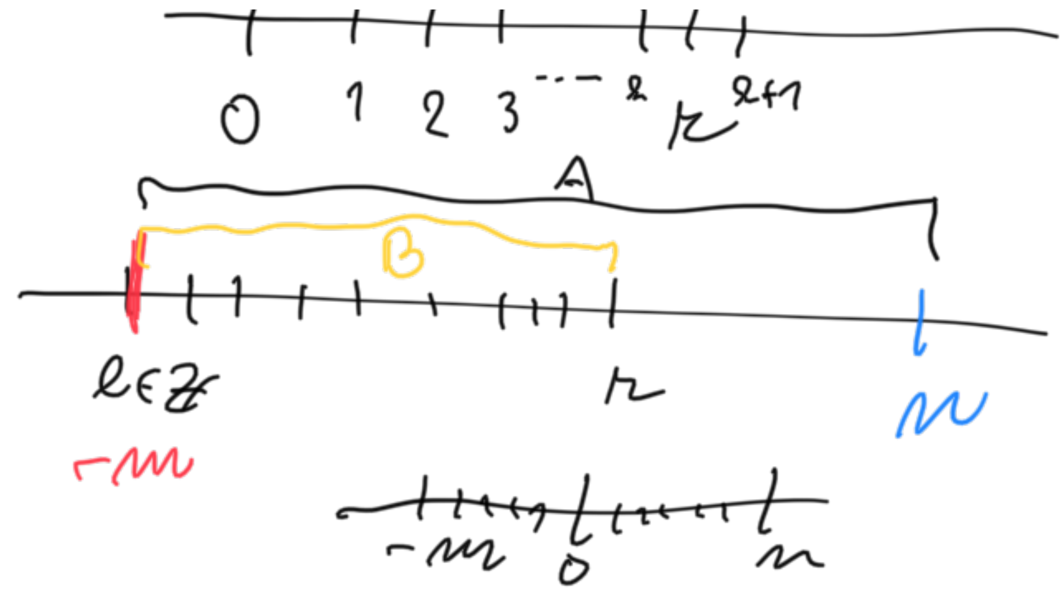
tedy má supremum $G \in \mathbb{R}$.

Platí: $\forall n \in \mathbb{N}: n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq G$,

tedy $\forall n \in \mathbb{N}: n \leq G-1$ ... spor s tím, že $G$ je nejmenší horní závora $\mathbb{N}$. $\square$




Důkaz: nechť $r \in \mathbb{R}$.




existence:

2 V4 $\Rightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}: m > -r$

$-m < r$

$\exists n \in \mathbb{N}: n > r$

Položme $A = \{ j \in \mathbb{Z},\ -m \le j \le n \}$. Pak $A$ je konečná (má $m+n+1$ prvků).

Dále položme $B = \{ j \in \mathbb{Z},\ -m \le j \le r \}$. Pak $-m \in B$, tedy $B$ je neprázdná. Dále $B \subset A$, takže $B$ je konečná. $B$ má tedy maximum, označme jej $k$.

Pak $k \in \mathbb{Z}$, $k \le r$

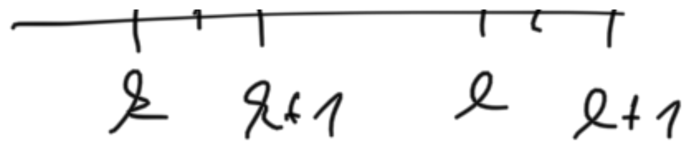
$$\left.\begin{array}{l} \text{a } k+1 \notin B \ (k \text{ je max.}) \\ k+1 > k \ge -m \end{array}\right\} \Rightarrow k+1 > r$$

jednoznačnost: Předpokládejme, že $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$

a $k \le r < k+1$

$r \overset{?}{\longleftrightarrow} r$

$k \le r < k+1$.




Pak $k+1 \le l$, tedy

$$r < k+1 \le l \le r,$$ což je spor. □

---

$y, r \ge 0$ $\quad y^n = x = r^n$

$y \ne r$ $\quad y < r \longrightarrow$ spor

---

Poznámky: 1) Číslo $y$ z VG se nazývá n-tou odmocninou čísla $x$, značíme jej $\sqrt[n]{x}$. Dále značíme

$\sqrt[2]{x} \dots \sqrt{x}$

2) $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ a $p, q \in \mathbb{N}$.

Výraz $x^{p/q}$ označuje číslo $\sqrt[q]{x^p}$, $x^{-\frac{p}{q}}$ označuje číslo $\frac{1}{x^{p/q}}$.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\quad x^{\frac{1}{2}} \overset{?}{=} x^{\frac{2}{4}}$

Lze ukázat, že je-li $p', q' \in \mathbb{N}$, $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$, pak

$$x^{\frac{p'}{q'}} = x^{\frac{p}{q}}$$

3) $x\in\mathbb{R}$, $x<0$ a $n\in\mathbb{N}$ liché, pak definujeme

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}.$$ Vskutku, potom $$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)^n =$$

$$= -\left(\sqrt[n]{-x}\right)^n = -(-x) = x.$$

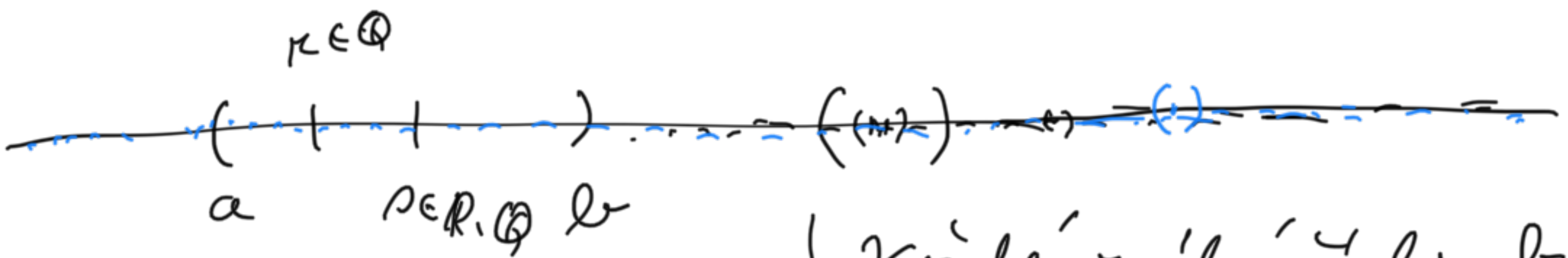
4) Z V6 a z toho, že $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, plyne, že existují iracionální čísla.

5) $x\in\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{x^2} = \cancel{x}$ $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x^2} = y\in\mathbb{R}$, $y\geq 0$, že $y^2 = x^2$

Pro $y=|x|$ je $\quad y^2 = |x|\cdot|x| = |x\cdot x| = |x^2| = x^2$

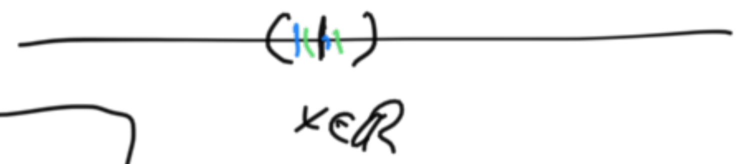
díky jednoznačnosti odmocniny

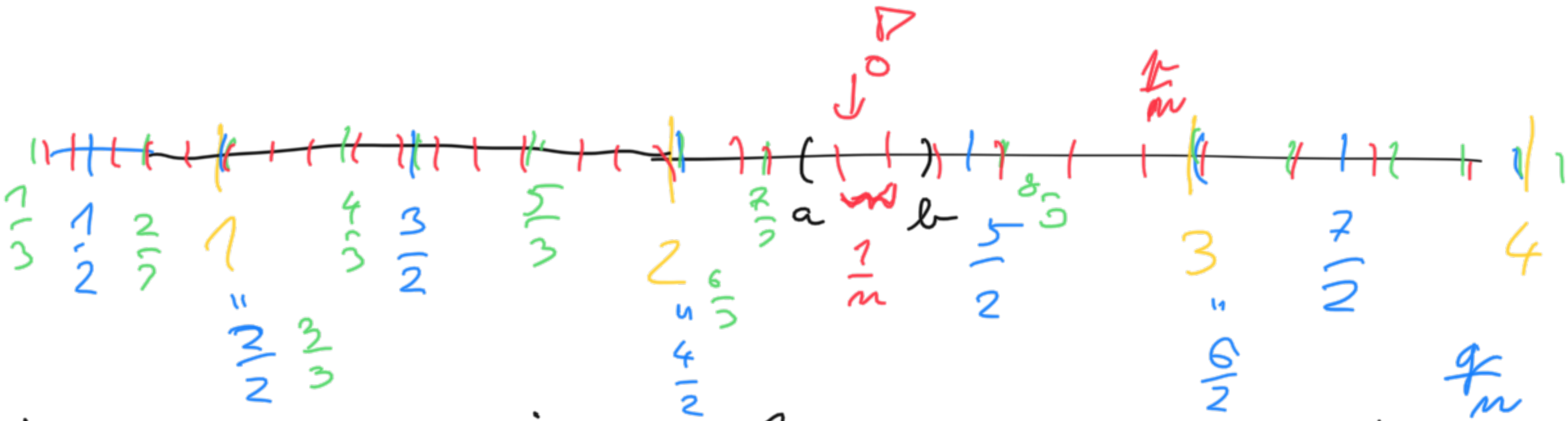


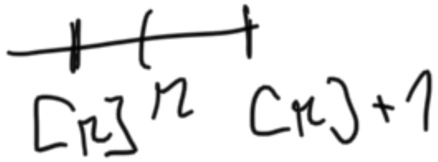

| Každé reálné číslo lze s libovolnou

**Důkaz:**

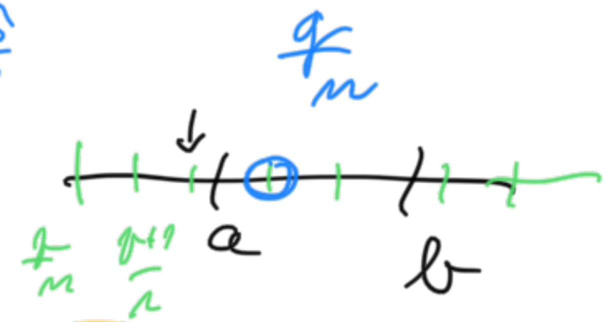
přesností přiblížit číslem racionálním.




asi chci $\frac{1}{n} < b-a$




Dle V4 $\exists\, n \in \mathbb{N}: n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{n} < b-a$

Položme $q = [an]+1$

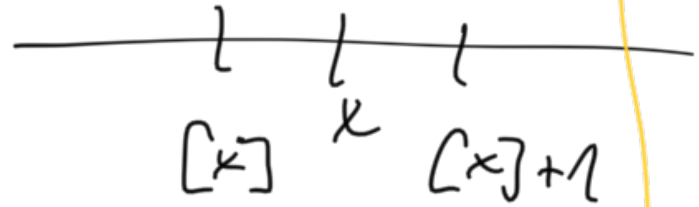
a $r = \frac{q}{n} = \frac{[an]+1}{n} \in \mathbb{Q}$

CHCI $a < r < b$

$$a < \frac{[an]+1}{n} < b$$

$$na < [an]+1 < nb$$

OK z def. celé části




CHCI

$$[an]+1 \le an+1 < nb$$

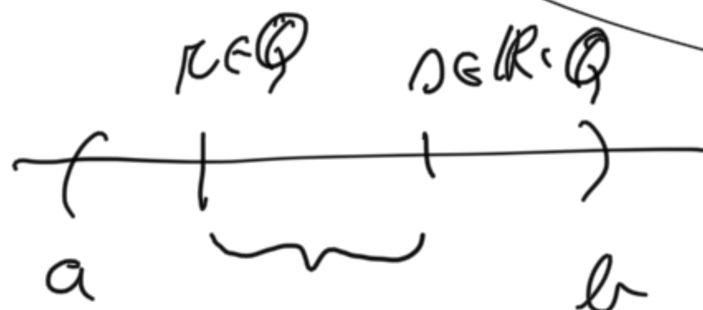
$$n(b-a) > 1$$

$$\frac{1}{n} < b-a$$

---

$$\left( x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \qquad x\cdot y = r \quad x = \frac{r}{y} \right)$$

$$y + x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$




---

Dle V4 $\exists\, m \in \mathbb{N} : m > \frac{\sqrt{2}}{b-r}$

$\frac{\sqrt{2}}{m} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ m \in \mathbb{N}$

Položím $s = r + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{m}}_{v} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

CHCI: $r + \frac{\sqrt{2}}{m} < b$

$\frac{\sqrt{2}}{m} < b - r$

Pak

$s > r > a$

a $s = r + \frac{\sqrt{2}}{m} < r + (b-r) = b$

$m > \frac{\sqrt{2}}{b-r}$

$\square$

---

axiom infima NEPLATÍ v $\mathbb{Q}$:

Položme $M = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geq 0;\ x^2 \geq 2\} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kdyby platil: $g = \inf_{\mathbb{Q}} M \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

a) $\underset{\mathbb{R}}{g} > \underset{\mathbb{R}}{\sqrt{2}}$ pak z V7 $\exists r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} < r < g$
$\Rightarrow 2 < r^2 \Rightarrow r \in M$, což je spor,
neboť $g$ je dolní závora $M$ ✗

b) $g < \sqrt{2}$ pak z V7 $\exists s \in \mathbb{Q}$, $g < s < \sqrt{2}$.

je-li $x \in M$, pak $x^2 \geq 2 \overset{(ví)}{\Rightarrow} x \geq \sqrt{2}$.

Protože $\sqrt{2}$ je dolní závora $M$ v $\mathbb{R}$, tak i
$s$ je dolní závora $M$ v $\mathbb{R}$, $s$ je i
dolní závora $M$ v $\mathbb{Q}$. ...

protože $g$ je největší dolní závora!

X

c) $g = \sqrt{2}$ X

$Q$ $Q$