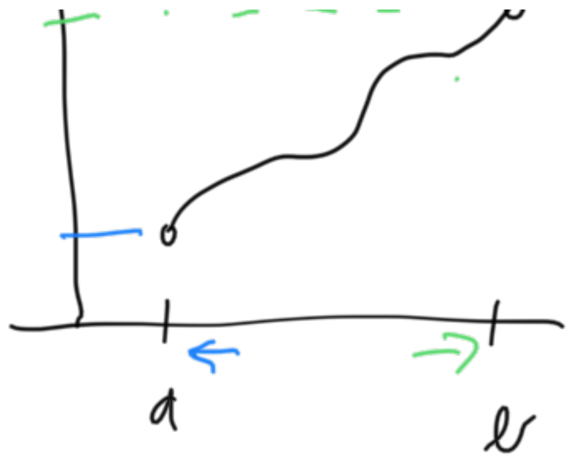
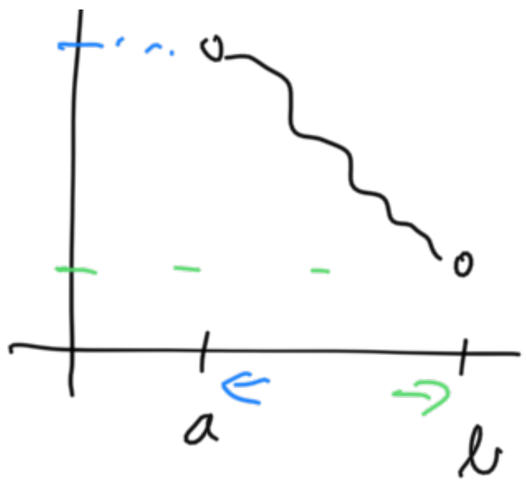


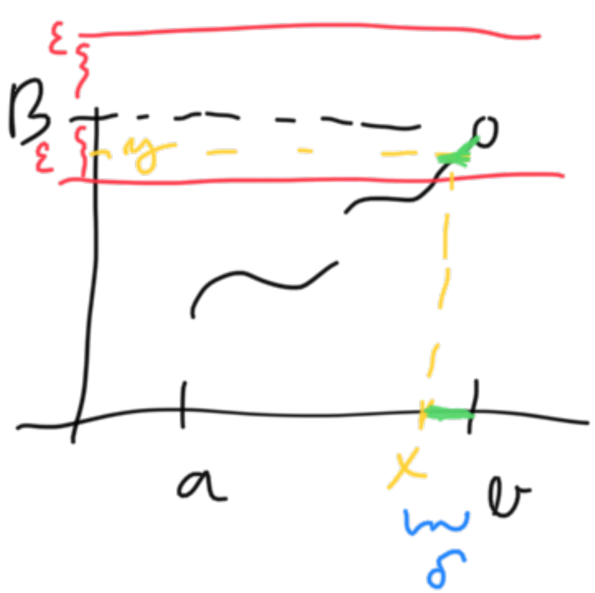


Důkaz: Dokážeme případ, kdy f je neklesající, $\lim_{x\to b-} f(x)$:

a $\sup f((a,b)) = B \in \mathbb{R}$

CHCI $\lim_{x\to b-} f(x) = B$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné.



Z def. suprema $\exists\, y \in f((a,b)) : y > B - \varepsilon$

Tedy $\exists\, x \in (a,b) : f(x) = y$

f je neklesající $\Rightarrow \forall z \in \langle x, b) : f(z) \geq f(x) = y > B - \varepsilon$

Navíc $\forall z \in \langle x, b) : f(z) \leq B < B + \varepsilon$.

Tedy $\forall z \in \langle x, b) : |f(z) - B| < \varepsilon$

$b \in \mathbb{R}$: Položíme $\delta = b - x$. Pak

$$P^-(b,\delta) = (x,b) \Rightarrow \forall z \in P^-(b,\delta): |f(z) - B| < \varepsilon$$

$b = +\infty$:

$x > 0$: Položíme $\delta = \frac{1}{x}$.

Pak $P^-(b,\delta) = P^-(+\infty, \frac{1}{x}) = (x, +\infty) = (x,b)$

$$\Rightarrow \forall z \in P^-(b,\delta): |f(z) - B| < \varepsilon$$

$x \leq 0$: Položíme $\delta = 1$.

Pak $P^-(b,\delta) = (1, +\infty) \subset (x, +\infty)$

$\square$

Jedna z variant VOLSF pro jednostranné limity:

Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim\limits_{x \to c-} g(x) = D$

$$\lim_{y \to D+} f(y) = A.$$

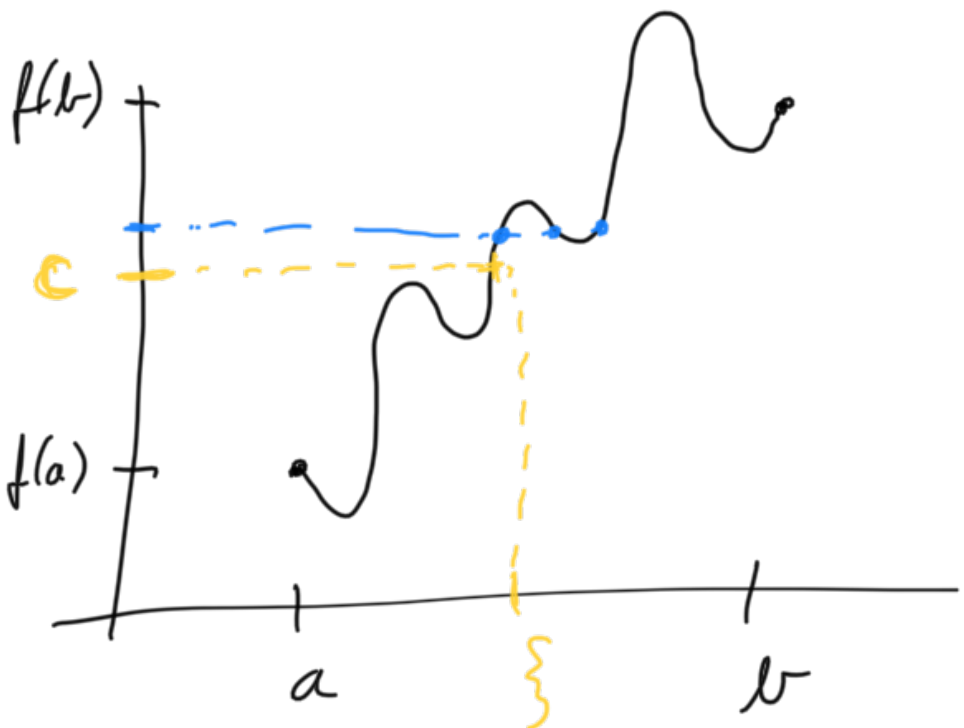
Předp., že je splněna jedna z násl. podmínek:

(P) $\exists \eta > 0 : \forall x \in P^-(c,\eta) : g(x) > D$

(S) f je spojitá v D zprava

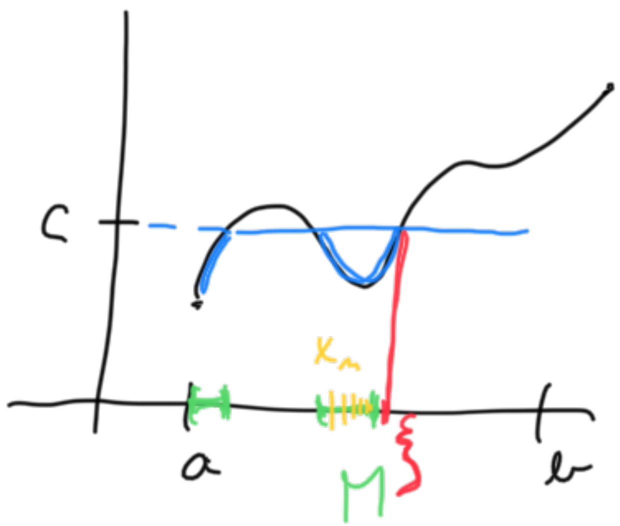
a $\exists \eta > 0: \forall x \in P^-(c,\eta): g(x) \geq D$

Potom $\lim\limits_{x \to c-} f \circ g(x) = A$.



Platí i varianta, kdy $f(b) < f(a)$, ale pak bereme $C \in (f(b), f(a))$.

<u>Důkaz:</u>



Vezměme $M = \{k \in \langle a,b\rangle;\ f(k) < C\}$

M je neprázdná $(a \in M)$, tedy má supremum.

Položme $\xi = \sup M$.

M je shora omezená b, tedy $\xi \in \mathbb{R}$.

Dokonce $\xi \in \langle a,b\rangle$.

Tvrdíme, že $f(\xi) = C$:

$$L16 \Rightarrow \exists \{x_n\},\ x_n \in M :\ \lim x_n = \xi$$

$$\Downarrow$$

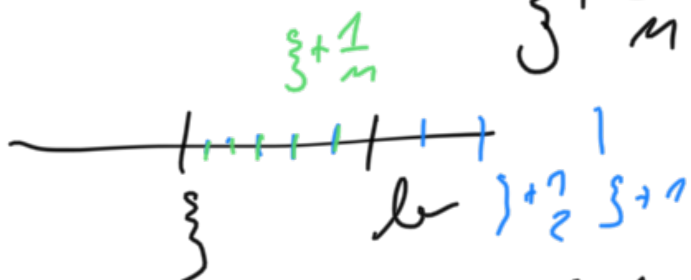
$$f(x_n) < C \overset{V13}{\Rightarrow} \lim f(x_n) \leq C$$

$$\| \text{ HEINE (V28)}$$

$$f(\xi)$$

Odtud plyne, že $\xi < b$ (protože $f(\xi) \leq C < f(b)$).

$\xi + \frac{1}{n} \in \langle a, b)$ pro velká $n \in \mathbb{N}$.



$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\xi + \frac{1}{n}}_{\downarrow\, n \to \infty \atop \xi} \notin M \Rightarrow f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) \geq C \overset{V13}{\Rightarrow} \lim f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) \geq C$$

$$\| \text{ HEINE (V28)}$$

$$f(\xi)$$

Tedy $f(\xi) \leq C$ & $f(\xi) \geq C \Rightarrow f(\xi) = C$. $\square$

$f(x) = \operatorname{sgn} x$

f není spojitá na $\mathbb{R}$ a $f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$ není interval.

Důkaz: Použijeme L3:

Zvolme libovolné $y_1, y_2 \in f(J)$ a $r \in \mathbb{R}$, $y_1 < r < y_2$.

CHCI $r \in f(J)$:

$$\exists\, x_1, x_2 \in J : \; f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$$

máme $f(x_1) < r < f(x_2)$, dle Bolzanovy věty (V29)

$$\exists\, \xi \in J : f(\xi) = r \quad (\xi \text{ leží „mezi" } x_1 \text{ a } x_2)$$

$$\Rightarrow r \in f(J)$$

$\overset{L3}{\Rightarrow}$ $f(J)$ je interval.

neostré $\square$